IOAN CRĂCIUNEL
LILIANA NICULESCU
PETRE SIMION
TIBERIU SPIRU

ALGEBRĂ

VIII

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

IOAN CRĂCIUNEL
PETRE SIMION
LILIANA NICULESCU
TIBERIU SPIRCU

Matematică



Algebră

Manual pentru clasa a VIII-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

CAPITOLUL I.

NUMERE

1. EXERCIŢII ŞI PROBLEME RECAPITULATIVE

1) Reamintiţi-vă proprietăţile operaţiilor cu numere. Efectuaţi :
a) $(214 + 437) \cdot 12 - 45$; b) $214 + 437 \cdot (12 - 45)$; c) $428 \cdot 41 - (312 \cdot 41 + 16 \cdot 41)$; d) $83 \cdot 815 + 815 \cdot 22 - 95 \cdot 815$.

2) Descompuneţi în factori primi numerele naturale :
a) 2904; b) 1539; c) 2156; d) 2475.

3) Un muncitor care lucrează la o maşină cîştigă 12 lei într-o oră pentru executarea în acest timp a 60 de piese. Fiecare piesă are preţul de cost de 1,25 lei. Care este procentajul manoperei în preţul de cost al piesei ?

4) Pentru a obţine un aliaj se topesc împreună 92 kg de cupru şi 5 kg de aluminiu. După îndepărtarea zgurei, se obţine un lingou cu masa de 90 kg. Cît costă kilogramul de aliaj, ştiind că aluminiul costă 28,20 lei/kg, cuprul costă 50,75 lei/kg, iar cheltuielile de topire (energie, manoperă) se ridică la 320 lei ?

5) Efectuaţi :
a) $(+2) \cdot (+3) \cdot (+4) \cdot (+5)$; b) $(+2) \cdot (+3) \cdot (-4) \cdot (-5)$; c) $(-2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (+5)$; d) $(-2) \cdot (+3) \cdot (-4) \cdot (+5)$; e) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5)$.

6) Scrieţi în formă zecimală numerele :
a) $\frac{11}{4}$; b) $\frac{82}{50}$; c) $-\frac{148}{25}$; d) $\left(\frac{8}{15} - \frac{5}{12}\right) \cdot \frac{18}{8-5}$

7) Efectuaţi, scriind rezultatul în formă zecimală :
a) $\left(-\frac{16}{3}\right) \cdot \left(-\frac{15}{8}\right) \cdot \left(-\frac{9}{14}\right) \cdot \left(+\frac{49}{12}\right)$; b) $(-1,2) \cdot (+2,1) \cdot (-3,7) \cdot (+4,5)$.

2. RIDICAREA LA PUTERE

Ne-am obişnuit să notăm 5^2 în loc de $5 \cdot 5$; $\left(-\frac{5}{4}\right)^3$ în loc de $\left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)$; $0{,}2^4$ în loc de $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2$. În general, dacă a este un număr real, notăm cu a^n numărul:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

şi citim „a ridicat la puterea a n-a". În această notaţie, a este **baza** puterii, iar n este **exponentul** puterii.

Notaţia de mai sus este adecvată pentru orice număr natural $n \geq 2$. Pentru $n = 1$ vom considera că $a^1 = a$. De asemenea, vom admite că $a^0 = 1$, pentru orice număr real $a \neq 0$.

EXERCIŢII

1) Completaţi tabelul de mai jos, cu puterile a^n:

a \ n	2	3	4	5	6	7	8
2							
3							
4							
5							

2) Calculaţi:

a) $(-2)^4$; b) -2^4; c) $(-1)^7$; d) $1{,}3^2$; e) $\left(\frac{1}{6}\right)^3$.

3) Calculaţi suma puterilor 2^n cu $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; comparaţi cu puterea 2^6; ce observaţi?

4) a) Calculaţi suma puterilor $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cu $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$; comparaţi cu 2.

b) Calculaţi suma puterilor $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cu $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; comparaţi cu 2. Ce observaţi?

Să scriem puterile ce au ca bază pe 10. Avem $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, apoi $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$, $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$, $10^4 = 10\,000$. Să observăm că exponentul unei puteri de acest fel ne arată numărul de cifre 0 ce apar după cifra 1, în scrierea zecimală a puterii.

Preferăm să folosim notaţia 10^9 în loc de 1 000 000 000 (un miliard !), deoarece este mai „economică".

Ridicarea la putere poate fi gîndită ca o operaţie: fiind date un număr real a şi un număr natural n (cel puţin unul dintre ele $\neq 0$), din ele obţinem un nou număr real, notat a^n. Mai nou se foloseşte şi notaţia $a^{**}n$, tocmai pentru a scoate în evidenţă semnul de operaţie „**".

Ridicarea la putere este o operaţie de ordinul al III-lea ; ea se execută deci înainte de efectuarea înmulţirilor şi împărţirilor (care sînt operaţii de ordinul al II-lea). Aşadar, vom scrie : $7 \cdot 10^6 = 7\ 000\ 000$; $2,1 \cdot 10^4 = 21\ 000$ etc.

EXERCIŢII

1) (oral) Ordonaţi crescător puterile : $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^1$.

2) (oral) Ştim că $a^5 = -0,7$ şi că $a \in \mathbf{R}$. Cunoaşteţi semnul lui a ?

3) Reprezentaţi pe o axă puterile a^n cu $a = 1,2$ şi $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. (Indicaţie : luaţi unitatea de măsură de 5 cm.)

4) Reprezentaţi pe o axă puterile a^n cu $a = 0,8$ şi $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Este adevărată propoziţia : „dacă $n > m$, atunci $a^n > a^m$" ? (Indicaţie : luaţi unitatea de măsură de 10 cm.)

5) Reprezentaţi pe o axă puterile a^n cu $a = -0,9$ şi $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ce observaţi ?

6) Calculaţi :

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; c) $(-0,1)^2$; d) $(-0,1)^3$; e) $(-0,1)^4$.

7) Calculaţi :

a) $\left(-1-\frac{1}{2}\right)^3$; b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)^2$; c) $(-1+0,1)^4$.

8) Care număr este mai mare :

a) $7 + 4^3$ sau $(7 + 4)^3$; b) $7^3 + 4^3$ sau $(7 + 4)^3$; c) $5 \cdot 6^3$ sau $(5 \cdot 6)^3$; d) $\frac{1}{2} \cdot 6^3$ sau $\left(\frac{1}{2} \cdot 6\right)^3$; e) $(4^4)^4$ sau 4^{4^4} ?

3. PROPRIETĂŢILE RIDICĂRII LA PUTERE

Să luăm ca bază numărul -2 şi să-i calculăm puterile. Avem : $(-2)^0 = +1$; $(-2)^1 = -2$; $(-2)^2 = +4$; $(-2)^3 = -8$; $(-2)^4 = +16$ şi aşa mai departe. Observăm că semnele alternează: pentru exponenţii pari semnul este +, iar pentru exponenţii impari semnul este −.

În general, dacă $a < 0$, atunci :

$$a^n \text{ este } \begin{cases} \text{pozitiv, dacă } n \text{ este par,} \\ \text{negativ, dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Dacă $a > 0$, atunci a^n este pozitiv pentru orice n.

Pentru $a = 0$, avem: $0^n = 0$, pentru orice $n \geq 1$. Scrierea 0^0 nu este acceptată ca scriere a vreunui număr real.

EXERCIȚII

1) (Oral) Stabiliți semnul puterii :

a) $(-3)^{12}$; b) $(-5)^3$; c) $(+2)^6$; d) 3^5 ; e) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$.

2) Pentru ce $n \in \mathbf{N}$ avem $(-2)^n < 0$? Dar $(-2)^{n(n+1)} > 0$?

Să privim cu atenție rîndul ce urmează :

$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$

Deci putem scrie că $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 2^{3+4}$.

În general, fie a un număr real $\neq 0$, iar m și n numere naturale. Atunci :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

deoarece :

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ factori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ factori}}$$

Dacă $a = 0$, atunci $0^m \cdot 0^n = 0^{m+n}$ pentru $m,n \geq 1$.

Regula I

Produsul a două puteri avînd aceeași bază este o putere cu aceeași bază, în care exponentul este suma exponenților factorilor.

EXERCIȚIU

Scrieți ca putere :

a) $3^8 \cdot 3^2$; b) $9^4 \cdot 9$; c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2$; d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^7 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^3$; e) $(-8)^4 \cdot 8^5$; f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^4$; g) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$.

EXERCIȚIU REZOLVAT

Să calculăm puterea $(-0{,}3)^8$.

Rezolvare. Scriem $(-0{,}3)^8 = (-0{,}3)^4 \cdot (-0{,}3)^4$; apoi $(-0{,}3)^4 = (-0{,}3)^2 \cdot (-0{,}3)^2$ și $(-0{,}3)^2 = (-0{,}3) \cdot (-0{,}3) = 0{,}09$. Deci $(-0{,}3)^4 = 0{,}09 \cdot 0{,}09 = 0{,}0081$ apoi $(-0{,}3)^8 = 0{,}0081 \cdot 0{,}0081 = 0{,}00006561$.

Să observăm că am efectuat trei înmulțiri ! Dacă am fi calculat respectînd formula : $(-0{,}3)^8 = \underbrace{(-0{,}3) \cdot (-0{,}3) \cdot \ldots \cdot (-0{,}3)}_{8 \text{ factori}}$, ar fi trebuit să efectuăm șapte înmulțiri.

EXERCIȚII

1) Calculați :

a) 2^{10} ; b) $-0,1^6$; c) $(-0,8)^4$; d) $\left(-\frac{3}{5}\right)^6$; e) $\left(-1-\frac{1}{2}\right)^6$; f) $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)^8$, efectuînd cît mai puține calcule.

2) Puteți calcula a^8 efectuînd patru înmulțiri ? Cum ?

Fie numărul $(5^2)^3$. Putem scrie :

$(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 5^{2 \cdot 3}$.

În general, fie a un număr real $\neq 0$, iar m și n numere naturale. Atunci :

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

deoarece :

$$(a^m)^n = \underbrace{(a^m) \cdot (a^m) \cdot \ldots \cdot (a^m)}_{n \text{ factori}} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ factori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ factori}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ factori}}}_{n \text{ grupe de cîte } m \text{ factori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \cdot n \text{ factori}}.$$

Dacă $a = 0$, atunci $(0^m)^n = 0^{m \cdot n}$ pentru orice $m, n \geq 1$.

Regula a II-a

O putere a unui număr real se ridică la putere păstrînd baza, iar exponentul se obține efectuînd produsul exponenților.

EXERCIȚII

1) Scrieți ca putere :

a) $(5^2)^6$; b) $[(-5)^2]^6$; c) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$; d) $\left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^2\right\}^4$; e) $(3^5 \cdot 3^3)^3$; f) $(0,4^3 \cdot 0,4^2)^2$; g) $11^6 \cdot 11^2 \cdot (11 \cdot 11^2)^3$.

2) Calculați :

a) $[(-1,1)^3]^2$; b) $[(-5)^2]^2$; c) $[(-0,7)^2]^2$; d) $(-3)^6 : (-2)^3$; e) $1,6^3 \cdot 0,5^2 \cdot (-2,5)^2$.

3) Care dintre numerele $(-1,3)^4$ și $(+1,4)^3$ este mai mare ?

Fie numărul $(4 \cdot 5)^3$. Putem scrie :

$(4 \cdot 5)^3 = (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) = (4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 4^3 \cdot 5^3$.

În general, fie a și b două numere reale (diferite de 0), iar n un număr natural. Atunci :

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

deoarece :

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ factori}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ factori}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ factori}}$$

Regula a III-a

Pentru a ridica la putere produsul a două numere, ridicăm fiecare dintre factori la acea putere, apoi înmulțim rezultatele obținute.

Aplicînd de două ori formula de mai sus, obținem :

$$(a \cdot b \cdot c)^n = [(a \cdot b) \cdot c]^n = (a \cdot b)^n \cdot c^n = (a^n \cdot b^n) \cdot c^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n ;$$

la fel pentru un produs de mai mulți factori.

Observație. În calcule formula $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ este folosită de obicei astfel :

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n ;$$

în loc de a efectua două ridicări la putere și o înmulțire, efectuăm doar o înmulțire și o ridicare la putere ; acest mod de calcul este avantajos în special în lucrul cu calculatoarele electronice.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1) Calculați :

a) $(8 \cdot 3)^2$; b) $2^3 \cdot 5^3$; c) $(-2)^3 \cdot (-5)^3$; **d)** $8^5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^5$; e) $(-4)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$; f) $(2^3 \cdot 3^3)^2$.

2) Scrieți ca putere, cu exponentul cît mai mare :

a) $9^5 \cdot 4^5$; b) $9^5 \cdot 3^5$; c) $2^5 \cdot 4^2 \cdot (-1)^4 \cdot 8$.

3) Calculați :

a) $4^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$; b) $4^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$; c) $4^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$. Ce observați ? Este adevărat că $4^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$? Dovediți !

4) a) Ionică a depus la CEC, în ziua de 30 decembrie 1978, suma de 1 000 lei. Pentru sumele depuse, CEC-ul acordă o dobîndă de 5% anual ; deci, la 30 decembrie 1979, Ionică avea la CEC suma de $1\,000 + \frac{5}{100} \cdot 1\,000 = 1\,050$ lei. La 30 decembrie 1980, Ionică avea la CEC $1\,050 + \frac{5}{100} \cdot 1\,050 = 1\,102{,}50$ lei. Puteți spune ce sumă avea la CEC Ionică, la 30 decembrie 1982, deci la 4 ani de la data depunerii ? (Presupunem că nu a retras bani, nici nu a depus alți bani.)

b) Calculați $1\,000 \cdot (1{,}05)^4$. Ce observați ?

5) Un brad în vîrstă de 5 ani are înălțimea de 100 cm. În fiecare an bradul crește în înălțime cu 20%. Ce înălțime va avea bradul la vîrsta de 10 ani ? (Exprimați în centimetri.)

6) Calculați :

a) $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$; b) $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$; c) $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$; d) $\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5$. Scrieți zecimal rezultatele obținute.

7) Efectuați :

a) $(-2ab)^3$; b) $a^4 \cdot (-a)^3$; **c)** $(-a)^2 \cdot (-a)^3$; **d)** $a^n \cdot a^{2m}$; **e)** $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$; f) $(-a^2)^{2n}$.

8) Calculaţi cît mai economic :

a) $5{,}64^3 \cdot 0{,}25^3$; b) $\left(\frac{5}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$; c) $\left(-\frac{7}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot (-2)^3$.

9) Un cub are lungimea muchiei egală cu a cm, iar altul are lungimea muchiei de două ori mai mare. Comparaţi volumele celor două cuburi. Al treilea cub are lungimea muchiei egală cu $3a$ cm. Este adevărat că are volumul de trei ori mai mare decît volumul celui de-al doilea cub ?

10) Un cub din plumb, cu lungimea muchiei de 1 dm, cîntăreşte 11,3 kg. Cît cîntăreşte un cub din plumb ce are lungimea muchiei de 2 dm ? Aţi putea să-l ridicaţi cu braţele ?

11) Comparaţi între ele numerele :
a) 2^{333} şi 3^{222} ; b) 10^{100} şi 100^{10}.

4. PUTERI CU EXPONENT (ÎNTREG) NEGATIV

Orice număr real $a \neq 0$ are un **invers**; acesta este numărul, notat $\frac{1}{a}$, ce are proprietatea că :

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

De exemplu, deoarece $2 \cdot 0{,}5 = 1$, inversul lui 2 este 0,5 ; scriem $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Inversul lui 0,4 este 2,5, deoarece $0{,}4 \cdot 2{,}5 = 1$; scriem $\frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$. Inversul lui 1 este 1.

Observaţie. Inversul lui $\frac{1}{a}$ este a, căci $\left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$.

Să ne reamintim faptul că împărţirea numerelor reale se defineşte cu ajutorul înmulţirii :

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b} \text{ (dacă } b \neq 0).$$

De aceea,

$$(a : b)^n = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^n = a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n.$$

Aşadar, $(a : b)^n = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = a^n : b^n$.

Observaţie. Pentru calcule vom folosi formula: $a^n : b^n = (a : b)^n$, care se mai scrie şi aşa : $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$. Efectuăm astfel un număr mai mic de operaţii

De exemplu, $\left(\frac{5}{8}\right)^3 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{8} : \frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$;
$\frac{5{,}64^4}{1{,}41^4} = \left(\frac{5{,}64}{1{,}41}\right)^4 = 4^4 = 256.$

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să calculăm $18^5 : 27^4$.

Am putea efectua cele două ridicări la putere, apoi împărţirea. Vom proceda însă în alt mod, pentru a economisi calcule. Vom descompune mai întîi, cu regula I : $18^5 = 18 \cdot 18^4$. Astfel :

$$\frac{18^5}{27^4} = \frac{18 \cdot 18^4}{27^4} = 18 \cdot \left(\frac{18}{27}\right)^4 = 18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 18 \cdot \frac{16}{81} = \frac{32}{9}.$$

EXERCIŢIU

Calculaţi :

a) $(-2)^5 : (-2)^3$; b) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 : \left(\frac{3}{4}\right)^4$; c) $24^5 : (-8)^4$; **d)** $\left(-2+\frac{1}{2}\right)^5 : \left(-2+\frac{1}{2}\right)^2$;
e) $\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^4 : \left(-\frac{1}{5}\right)^2\right]^2$; **f)** $\left(-\frac{1}{25}\right)^4 : \left(-\frac{1}{15}\right)^3$.

Pentru a nota inversul lui a se foloseşte şi scrierea a^{-1} sub formă de putere cu exponent -1. Aşadar,

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

În general, vom folosi notaţia a^{-n} în loc de $\frac{1}{a^n}$:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

De exemplu, $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{64}} = 64$;

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{8}{27}} = -\frac{27}{8}.$$

Observaţie. Scrierea 0^{-n} pentru $n \in \mathbf{N}$ nu este acceptată ca scriere a vreunui număr real.

EXERCIŢII

1) (oral) Calculaţi :
a) 2^{-2}; b) 3^{-1}; c) 4^{-2}; d) 5^{-3}; e) $2{,}3^{0}$; f) $(1{,}53^{1})^{0}$.

2) Calculaţi :

a) $(-3)^{-3}$; b) $(-5)^{-1}$; c) $(-1)^{-7}$; d) $(-1)^{-3}$; e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; f) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$; g) $\left(-1+\frac{1}{3}\right)^{-2}$;

h) $\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right)^{-1}$; i) $\left(\frac{1}{2}-2\right)^{-3}$; j) $0{,}25^{-2}$; k) $0{,}8^{-3}$; l) $(-0{,}4)^{-3}$.

3) Scrieţi ca putere, cu exponentul negativ:

a) $\frac{1}{10^2}$; b) $\frac{1}{5^5}$; c) $\frac{1}{10\ 000}$; d) $\frac{1}{27}$; e) $\frac{1}{16}$.

4) Scrieţi ca putere, cu bazele indicate :

a) $32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}$, cu baza 2;

b) $\frac{1}{625},\ \frac{1}{125},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{5}$, 1, 5, 25, 125, 625 cu baza 5;

c) $\frac{1}{10\ 000},\ \frac{1}{1\ 000},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10}$, 1, 10, 100, 1 000, 10 000 cu baza 10.

5) Arătaţi că :

a) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{5}$; b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{3}$; c) $0{,}6^{-3}=\left(\frac{5}{3}\right)^{3}$; d) $1{,}5^{-2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$.

Folosirea exponenţilor negativi nu intră în contradicţie cu regulile de lucru cu puteri, învăţate mai înainte.

De exemplu,

$$(-2)^{-4}\cdot(-2)^{5}=\frac{1}{(-2)^{4}}\cdot(-2)^{5}=\frac{1}{16}\cdot(-32)=-2,$$

iar

$$(-2)^{-4+5}=(-2)^{1}=-2;\ \text{deci}\ (-2)^{-4}\cdot(-2)^{5}=(-2)^{-4+5}.$$

În general,

$$a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$$

pentru orice număr real $a\neq 0$ şi orice numere *întregi* m şi n.

EXERCIŢIU

Calculaţi :
a) $4^{4}\cdot 4^{-3}$; b) $9^{3}\cdot 3^{-7}$; c) $(2x)^{-3}\cdot(2x)^{4}$; d) $25^{3}\cdot 5^{-4}$.

Să luăm de exemplu numărul $(2^{-3})^{2}$; obţinem : $(2^{-3})^{2}=\left(\frac{1}{2^3}\right)^{2}=\left(\frac{1}{8}\right)^{2}=\frac{1}{64}$.

Pe de altă parte, $2^{(-3)\cdot 2}=2^{-6}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$. Observăm că $(2^{-3})^{2}=2^{(-3)\cdot 2}$.

Alt exemplu. Dacă calculăm $(0{,}5^{-2})^{-2}$, obținem :

$(0{,}5^{-2})^{-2} = \left(\frac{1}{0{,}5^2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{0{,}25}\right)^{-2} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$. Pe de altă parte, $(0{,}5)^{(-2)\cdot(-2)} = (0{,}5)^4 = 0{,}0625$. Observăm că avem : $(0{,}5^{-2})^{-2} = (0{,}5)^{(-2)\cdot(-2)}$.

În general,

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n},$$

pentru orice număr real $a \neq 0$ și orice numere *întregi* m și n.

EXERCIȚII

1) Calculați :

a) $[(-2)^{-3}]^{-3}$; b) $[-(-1)^{-1}]^{-1}$; c) $(-1)^{-1} \cdot (-2)^{-2} \cdot [(-3)^{-1}]^{-1}$; d) $(4a)^3 \cdot [(4a)^{-2}]^2$.

2) Printre numerele :

a) $(x^{-2})^3$; b) $(x^{-3})^2$; c) $(-x^{-2})^4$; d) $(-x^{-2})^{-3}$; e) $(-x^3)^{-2}$; f) $-(x^2)^{-3}$; g) $-(x^{-3})^2$; h) $-(x^{-2})^3$, cîte sînt distincte ? (Presupunem $x \neq 0$.)

3) Scrieți sub formă de putere :

a) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}\right]^{-1}$; b) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$; c) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{-2}$; d) $(5^{-2} \cdot 5^{-1} \cdot 5^0 \cdot 5^1)^2$;

e) $\{[(-3)^{-4}]^{-3}\}^{-2}$.

Fie, de exemplu, produsul $(-3)^{-2} \cdot 5^{-2}$. Să-l calculăm:

$(-3)^{-2} \cdot 5^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{225}$. Pe de altă parte, $[(-3) \cdot 5]^{-2} = (-15)^{-2} = \frac{1}{(-15)^2} = \frac{1}{225}$. Observăm că $(-3)^{-2} \cdot 5^{-2} = [(-3) \cdot 5]^{-2}$.

În general,

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

pentru orice numere reale a, b (diferite de 0) și orice număr întreg n.

De asemenea, în aceleași condiții, avem:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

EXERCIȚIU REZOLVAT

Să calculăm numărul $25^4 \cdot 5^{-6}$.

Ar trebui să calculăm mai întîi puterea $25^4 = 390\ 625$, apoi puterea $5^{-6} = \frac{1}{15\ 625}$ și în final să efectuăm înmulțirea :

$$25^4 \cdot 5^{-6} = 390\ 625 \cdot \frac{1}{15\ 625} = 390\ 625 : 15\ 625 = 25.$$

Dar, observăm că $25 = 5^2$; putem scrie astfel :

$$25^4 \cdot 5^{-6} = (5^2)^4 \cdot 5^{-6} = 5^8 \cdot 5^{-6} = 5^2 = 25.$$

EXERCIŢII

1) Calculaţi :
a) $12^4 : 4^4$; b) $36^4 : (-9)^4$; c) $(-0,5)^5 \cdot 4^5$; d) $0,2^6 \cdot 10^6$; e) $(-2)^{-5} : (-2)^{-5}$.
2) Scrieţi sub formă de putere :
a) $2^{-4} : 2^{-8}$; b) $2^4 \cdot 2^{-5} \cdot 2^3 \cdot 2^{-1}$; c) $[(-2)^{-3}]^{-2} \cdot (-2)^{-2}$.

5. APLICAŢII

Folosirea exponenţilor negativi ne permite să renunţăm la a scrie linii de fracţie. Mai precis, deoarece

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b},$$

putem înlocui scrierea $\frac{a}{b}$ prin ab^{-1}.

În particular, $\frac{3}{10} = 3 \cdot 10^{-1}$; $\frac{7}{100} = 7 \cdot 100^{-1} = 7 \cdot 10^{-2}$; $\frac{2}{1\,000} = 2 \cdot 1\,000^{-1} = 2 \cdot 10^{-3}$.

EXERCIŢIU

Scrieţi fără linie de fracţie (şi fără virgulă) :
a) $\frac{5}{10}$; b) $\frac{3}{1\,000}$; c) $\frac{9}{10\,000}$; d) $\frac{3}{7}$; e) $\frac{14}{25}$.

Am învăţat în clasa a V-a că, de exemplu, 524,367 înseamnă

$$5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 4 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1\,000}.$$

Eliminînd liniile de fracţie, notaţia devine unitară (urmăriţi exponenţii) :

$$5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}.$$

În fizică, astronomie şi chimie se lucrează cu numere mai „mari" sau mai „mici" decît cele cu care sîntem obişnuiţi.

De exemplu, viteza luminii este de aproximativ 300 000 000 m/s; masa Pămîntului este de aproximativ 5 974 000 000 000 000 000 000 t; masa unui atom de hidrogen este de aproximativ 0,00000000000000000000000167 g.

Este destul de greoi să lucrăm cu numere de acest fel. De aceea, în practică se utilizează mult **scrierea standard** a numerelor reale.

Să dăm cîteva exemple. Numărul 20 poate fi scris $2 \cdot 10$, sau $0,2 \cdot 10^2$; această ultimă scriere este *scrierea standard* a sa.

Numărul 6 poate fi scris standard astfel : $0,6 \cdot 10^1$. Numărul 0,15 este scris standard astfel : $0,15 \cdot 10^0$. Numărul 0,015 este scris standard astfel : $0,15 \cdot 10^{-1}$. În general, un număr real pozitiv a este scris standard în forma

$$m \cdot 10^e$$

unde $0,1 \leq m < 1$, iar e este un număr întreg. Numărul m este numit **mantisa** lui a. Astfel, mantisa lui 20 este 0,2, mantisa lui 0,15 este 0,15; mantisa lui 0,015 este şi ea 0,15.

Să scriem în formă standard :

— viteza luminii : $0,3 \cdot 10^9$ m/s ;

— masa Pămîntului : $0,5974 \cdot 10^{22}$ t ;

— masa atomului de hidrogen : $0,167 \cdot 10^{-23}$ g.

EXERCIŢII

1) Care este mantisa numărului real :
a) $0,47 \cdot 10^{-3}$; b) $0,12 \cdot 10^2$; c) 169000; d) 365; e) 0,00012; f) $7,35 \cdot 10^3$.

2) Scrieţi în formă standard numărul :
a) 10 100; b) 650 000; c) 0,002; d) 0,03005; e) 0,000067.

3) Scrieţi în formă standard produsul numerelor :
a) $0,1 \cdot 10^0$ şi $0,1 \cdot 10^{-1}$; b) $0,6 \cdot 10^2$ şi $0,9 \cdot 10^1$; c) $0,88 \cdot 10^3$ şi $0,75 \cdot 10^2$.

4) Cîte secunde are un an bisect ? Cîţi metri parcurge o rază de lumină, într-un an bisect ? (Exprimaţi în formă standard.)

5) Masa Soarelui este de aproximativ $0,2 \cdot 10^{31}$ kg. De cîte ori este mai mare masa Soarelui decît masa Pămîntului ?

6) Distanţa medie de la Pămînt la Soare este de $0,156 \cdot 10^9$ km. Cît timp îi trebuie unei raze de lumină să parcurgă această distanţă ?

6. INTERVALE

Să reprezentăm mulţimea numerelor reale printr-o axă (vezi figura 1). Fiecărui număr real îi corespunde un punct pe axă : de exemplu, numărului 1 îi corespunde punctul I, lui 0 îi corespunde O, numărului a îi corespunde punctul A.



Fig. I.1

Fie a şi b numerele reale (cu $a \leq b$). În clasa a VII-a am învăţat să notăm cu $[a ; b]$ mulţimea $\{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leq x \text{ şi } x \leq b\}$. Această mulţime se numeşte **interval închis de extremităţi** a, b.

Dacă extremităţilor a şi b le corespund pe axă punctele A, respectiv B, atunci intervalului închis $[a ; b]$ îi corespunde mulţimea punctelor situate pe segmentul AB (vezi figura 2).



Fig. I.2

Intervalele închise sînt mulţimi de numere; deci toate operaţiile ce se pot efectua cu mulţimi (reuniunea, intersecţia etc.) se pot efectua şi cu intervale.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să scriem într-o formă mai simplă mulţimile :

$$[-7; 3] \cup [0; 8] \text{ şi } [-7; 3] \cap [0; 8].$$

Reamintim că dacă A şi B sînt mulţimi, atunci

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} \text{ iar } A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}.$$

Să reprezentăm intervalele $[-7; 3]$ şi $[0; 8]$ prin segmente pe axa numerelor (vezi figura 3). Reuniunea lor este formată din elementele ce aparţin cel puţin unuia dintre intervale; deci :

$$[-7; 3] \cup [0; 8] = [-7; 8].$$



Fig. I.3.

Intersecţia lor este formată din elementele ce aparţin ambelor intervale. Deci :

$$[-7; 3] \cap [0; 8] = [0; 3].$$

EXERCIŢII

1) Desenaţi o axă a numerelor (luaţi unitatea de măsură de 2 cm). Reprezentaţi pe ea, ca în figura 2, intervalele :

$$[-3 ; -2]; \left[-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{4}\right]; \left[0 ; \frac{1}{2}\right]; \left[\frac{3}{4} ; 2\right] \text{ şi } [2,4; 2,5].$$

2) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor :
a) $3 \in [0; 3]$; b) $0 \in [0; 3]$; c) $5 \in [4; 12]$; d) $4 \in [5; 12]$; e) $12 \in [4; 5]$.

3) Arătaţi că dacă $a \leq b$, atunci $\frac{a+b}{2} \in [a;b]$.

4*) Este adevărată propoziţia : „dacă $[a;b]$ este un interval închis, atunci $a \in [a;b]$"?

5) Scrieţi într-o formă mai simplă mulţimile :
a) $[0; 7] \cup [7; 15]$; b) $[1; 3] \cup [3; 9]$; c) $[1; 3] \cup [2; 7]$; d) $[a; a+1] \cup [a+1; a+2]$;
e) $[a-1; a] \cup [a; a+1]$; f) $[-1; 2] \cup [-2; 1]$; g) $[1,2; 2,2] \cup \left[\frac{7}{6}; \frac{13}{7}\right]$.

6) Efectuaţi :
a) $[2; 3] \cap [3; 9]$; b) $[0; 7] \cap [4; 11]$; c) $[-1; 2] \cap [-2; 1]$; d) $[1; 2] \cap [-1; 10]$; e) $[a-1; a] \cap [a; a+1]$; f*) $[-a; a] \cap [-1; 1]$, pentru $a > 0$.

7) Precizaţi elementele mulţimilor :
a) $\mathbf{Z} \cap [-3; 2]$; b) $\mathbf{N} \cap [-3; 2]$; c) $\mathbf{Z} \cap [1; 6]$.

8) Care mulţime X satisface condiţiile $X \subset [-1; 4]$ şi $X \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\}$? Soluţia este unică ? Dar dacă cerem ca X să fie interval ?

9) Care interval $[a; b]$ îndeplineşte amîndouă condiţiile :

$$[a; b] \cup [3; 7] = [3; 9] \text{ şi } [a; b] \cap [3; 7] = [5; 7] ?$$

Fie a şi b numere reale cu $a < b$. Se obişnuieşte să se noteze cu $(a;b)$ mulţimea

$$\{x \mid x \in \mathbf{R}, a < x \text{ şi } x < b\},$$

numită **interval deschis de extremităţi** a, b. Deoarece nu este adevărat că $a < a$, rezultă că $a \notin (a; b)$; la fel, $b \notin (a; b)$, adică intervalele deschise nu-şi conţin extremităţile.

Dacă $a < b$, atunci intervalului deschis $(a; b)$ îi corespunde pe axă mulţimea punctelor interioare segmentului AB (vezi figura 4).



Fig. I.4.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să scriem într-o formă mai simplă mulţimile :

$$(-2; 3) \cup (0; 4) \text{ şi } (-2; 3) \cap (0; 4).$$

Să reprezentăm intervalele $(-2; 3)$ şi $(0; 4)$ prin părţi ale unei axe (vezi figura 5). Numărul 3 aparţine intervalului deschis $(0; 4)$; la fel, 0 aparţine lui $(-2; 3)$. Observăm că reuniunea celor două intervale este intervalul deschis $(-2; 4)$, iar intersecţia celor două intervale este intervalul deschis $(0; 3)$.

Fig. I.5.



EXERCIŢII

1) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor :

a) $0 \in (0; 3)$; b) $0,1 \in (-0,1; 0,2)$; c) $\frac{1}{7} \in \left(\frac{1}{10}; \frac{3}{10}\right)$; d) $-\frac{1}{8} \in (-1; 0)$; e) $\frac{1}{8} \in \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$; f) $\frac{81}{128} \in \left(\frac{31}{49}; \frac{50}{79}\right)$; g) $-\frac{59}{93} \in \left(-\frac{33}{52}; -\frac{26}{41}\right)$.

2) Efectuaţi :

a) $(0; 7) \cup (6,5; 7,5)$; b) $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(-1; \frac{1}{3}\right)$; c) $(0; 3,1) \cup (-1; 4)$; d) $(2; 3) \cup (1; 5)$; e) $\left(-1; \frac{4}{5}\right) \cup \left(1; \frac{4}{5}\right)$; f) $(0; 1) \cap (1; 2)$; g) $\left(-\frac{7}{13}; \frac{6}{13}\right) \cap \left(-\frac{6}{13}; \frac{7}{13}\right)$; h) $(0; 3) \cap (2; 3)$; i) $\left(\frac{46}{73}; \frac{41}{65}\right) \cap \left(\frac{29}{46}; \frac{12}{19}\right)$; j) $\left(-\frac{5}{8}; -\frac{23}{37}\right) \cap \left(-\frac{28}{45}; -\frac{41}{66}\right)$.

3) Precizaţi elementele mulţimilor, enumerîndu-le :
a) $\mathbf{N} \cap (0; 5)$; b) $\mathbf{Z} \cap (-3; 4)$; c) $\mathbf{N} \cap (-4; 3)$.

4) Arătaţi că dacă a, b sînt numere reale pozitive şi $a < b$, atunci $ab \in (a^2; b^2)$.

Să observăm că, intersectînd două intervale închise, obţinem un interval închis. Intersectînd două intervale deschise obţinem un interval deschis.

Ce obţinem dacă intersectăm un interval închis cu unul deschis ? Să luăm de exemplu intervalul închis $[-1; 1]$ şi intervalul deschis $(0; 2)$, reprezentate în figura 6. Observăm că intersecţia lor este formată din toate numerele reale care sînt mai mari decît 0 şi mai mici decît 1, inclusiv numărul 1, însă numărul 0 nu



Fig. 1.6.

aparţine intersecţiei. Această mulţime de numere se notează $(0; 1]$ şi se numeşte interval semideschis cu extremităţile 0 şi 1, deschis la stînga şi închis la dreapta. Deci

$$(0; 1] = \{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x \text{ şi } x \leq 1\} \text{ şi } [-1; 1] \cap (0, 2) = (0; 1].$$

În general, dacă $a < b$, se obişnuieşte să se noteze cu $(a; b]$ mulţimea

$$\{x \mid x \in \mathbf{R}, a < x \text{ şi } x \leq b\};$$

ea se numeşte **interval semideschis** cu extremităţile a şi b, deschis la stînga şi închis la dreapta. La fel, se notează cu $[a; b)$ mulţimea $\{x \mid x \in \mathbf{R}, a \leq x$ şi $x < b\}$.

EXERCIŢII

1) (oral) Citiţi : $[0; 1)$; $(0; 1]$; $[-1; 3)$; $(-3; 1]$.

2) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor :

a) $0 \in [0; 2)$; b) $2 \in [0; 2)$; c) $1 \in [0; 2)$; d) $\frac{1}{7} \in \left(\frac{1}{10}; \frac{2}{14}\right]$; e) $\frac{1}{3} \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$.

3) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor :

a) $(2; 3) \subset (2; 3]$; b) $[2; 3) \subset [2; 3]$; c) $(a; b) \subset [a; b]$; d) $(a; b] \subset [a; b)$; e) $(a; b) \subset (a; b]$; f) $(a; b] \subset [a; b]$.

4) Efectuaţi reuniunile :

a) $(3; 6] \cup [2; 4)$; b) $\left(-\frac{1}{7}; 1\right] \cup \left[0; \frac{7}{5}\right)$; c) $[1; 2] \cup [-1; 13)$; d) $(-1; 3) \cup \{1, 2, 3\}$;

e) $(1{,}3; 4{,}1) \cup (1{,}4; 4{,}2]$; f) $\left(\frac{5}{8}; 1\frac{3}{7}\right) \cup \left[\frac{7}{11}; \frac{11}{7}\right]$; g) $\left(-\frac{23}{7}; -\frac{22}{7}\right) \cup \left(-\frac{25}{9}; -\frac{20}{9}\right]$.

5) Efectuaţi :

a) $(-7; 3) \cap [0; 8]$; b) $\left(-\frac{2}{9}; \frac{10}{9}\right] \cap \left[-\frac{3}{7}; \frac{5}{7}\right)$; c) $(1{,}5; 3{,}2) \cap [2{,}3; 5{,}1]$; d) $\left[\frac{8}{11}; \frac{20}{7}\right] \cap \left[\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right)$; e) $\left(\frac{7}{11}; \frac{23}{36}\right] \cap \left[\frac{30}{47}; \frac{16}{25}\right)$; f) $\left[\frac{27}{43}; \frac{39}{62}\right) \cap \left(\frac{22}{35}; \frac{17}{27}\right]$.

6) Care interval I îndeplineşte condiţiile :

$$I \cap (3; 7] = [5; 7] \text{ şi } I \cup (3; 7] = (3; 9)\ ?$$

Intervalele de forma $[a; b]$, $(a; b)$, $[a; b)$ şi $(a; b]$ au extremităţile a şi b; ele se numesc intervale **mărginite**. Vom mai folosi şi intervale **nemărginite**. Anume, vom nota cu $[a; +\infty)$ mulţimea $\{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leq x\}$ şi cu $(a; +\infty)$ mulţimea $\{x \mid x \in \mathbf{R},\ a < x\}$. Acestea sînt intervale cu extremitatea a, nemărginite la dreapta.

Dacă extremităţii a îi corespunde pe o axă punctul A (vezi figura 7) atunci intervalului nemărginit $(a; +\infty)$ îi corespunde semidreapta marcată, formată din punctele situate „la dreapta" lui A.

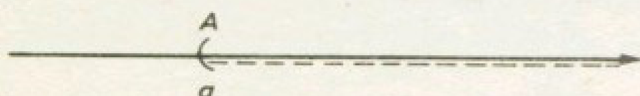


Fig. I.7.



Fig. I.8.

Vom nota cu $(-\infty; a]$ mulţimea $\{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \leq a\}$ şi cu $(-\infty; a)$ mulţimea $\{x \mid x \in \mathbf{R},\ x < a\}$. Acestea sînt intervale cu extremitatea a, nemărginite la stînga.

Intervalului nemărginit $(-\infty; a)$ îi corespunde pe axă o semidreaptă (cea marcată în figura 8), formată din punctele situate „la stînga" lui A.

Observaţie. Simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$ nu reprezintă numere reale. Se obişnuieşte să se citească simbolul $+\infty$ astfel: „plus infinit".

Se obişnuieşte să se noteze cu $(-\infty; +\infty)$ mulţimea numerelor reale.

EXERCIŢII

1) Desenaţi o axă, luînd unitatea de măsură de 1 cm. Pe această axă reprezentaţi :

a) mulţimea numerelor reale x astfel încît $x \leq 5{,}1$;

b) mulţimea numerelor reale y astfel încît $y \geq -1{,}2$.

Există numere reale z astfel încît să avem $z \leq 5{,}1$ şi $z \geq -1{,}2$? Prin ce sînt ele reprezentate pe axă ?

2) Reprezentaţi pe aceeaşi axă intervalele $(-\infty;\ 3]$ şi $(2;\ +\infty)$. Puteţi preciza intersecţia lor?

3) Ce puteţi spune despre numerele a şi b, dacă intersecţia intervalelor $(-\infty;\ a]$ şi $[b;\ +\infty)$ este mulţimea vidă ?

4) Dacă $a < b$, ce puteţi spune despre intersecţia intervalelor $[a;\ +\infty)$ şi $[b;\ +\infty)$? Dar despre reuniunea lor ?

5) Efectuaţi :

a) $\left(-\infty;\ \frac{55}{89}\right] \cap \left[\frac{21}{34};\ +\infty\right)$; b) $\left(-\infty;\ -\frac{47}{76}\right) \cap \left(\frac{34}{55};\ +\infty\right)$; c*) $(-\infty;\ a] \cap [b;\ +\infty)$;
d*) $(-\infty;\ a) \cap [b;\ +\infty)$; e) $(-\infty;\ a) \cap (b;\ +\infty)$.

6) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor :

a) $(-\infty;\ -1] \subset (-\infty;\ 1)$; b) $(-\infty;\ -1) \subset (-\infty;\ 2]$; c) $\left(-\infty;\ -\frac{7}{5}\right] \subset \left(-\infty;\ -\frac{11}{8}\right)$;
d) $8 \in (-8;\ +\infty)$; e) $-6 \in [3;\ +\infty)$; f) $\left(-\infty;\ -\frac{44}{71}\right) \subset \left(-\infty;\ -\frac{31}{50}\right)$; g) $\frac{41}{66} \in \left(-\infty;\ \frac{23}{37}\right) \cap \left(\frac{18}{29};\ +\infty\right)$.

Să ne reamintim că am notat cu $|x|$ pe acela dintre numerele x şi $-x$ care este pozitiv, numindu-l **valoarea absolută** a lui x (sau **modulul** lui x). Mai precis,

$$|x| = \begin{cases} x \text{ dacă } x \geq 0 ; \\ -x \text{ dacă } x < 0. \end{cases}$$

De exemplu, $|0{,}75| = 0{,}75$, $|-0{,}75| = 0{,}75$, $|-1| = 1$, $|1{,}25| = 1{,}25$, $|-1{,}25| = 1{,}25$. Să observăm că mulţimea

$$\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ şi } |x| \leq 1\}$$

este de fapt intervalul închis $[-1;\ 1]$.

EXERCIŢII

1) (oral) Există numere reale x astfel încît $|x| = -3$? De ce ? Care numere reale y au proprietatea că $|y| = 2{,}13$?

2) Scrieţi sub formă de interval mulţimile :

a) $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ şi } |x| \leq 4\}$; b) $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ şi } |x-1| < 3\}$; c) $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ şi } |x-0{,}5| \leq 1{,}5\}$; d) $\{y \mid y \in \mathbf{R} \text{ şi } |y-3| \leq 2\}$.

3) Scrieţi sub formă de interval mulţimile :

a) $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ şi } |x-1| < 1\}$; b) $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ şi } |x-1| < 0{,}1\}$; c) $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ şi } |x-1| < 0{,}01\}$; d) $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ şi } |x-1| < 0{,}001\}$.

Reprezentaţi pe o axă aceste intervale. Ce observaţi ?

4) Reprezentaţi pe o axă numerele $a = 1{,}2$ şi $b = 7{,}6$ (luaţi unitatea de măsură de 1 cm). Calculaţi media aritmetică a numerelor a şi b, fie aceasta c; reprezentaţi-o pe axă.

Calculaţi apoi $d = \frac{a+c}{2}$, $e = \frac{a+d}{2}$, $f = \frac{a+e}{2}$ şi reprezentaţi numerele d, e, f pe axă. Ce observaţi ?

5) Reprezentaţi pe o axă mulţimea numerelor z cu $|z| \geq 2$.

6) Notăm $A = [-5; 8]$, $B = [2; 7)$, $C = (-3; 0)$, $D = (0; 5]$ şi $E = (-3; 8)$.

Efectuaţi :

a) $A \cup B$; b) $C \cap D$; c) $(A \cup B) \cup C$; d) $(A \cap B) \cap D$; e) $(A \cap B) \cup E$; f) $\mathbb{Z} \cap E \cap D$; g) $D \setminus B$.

7. APROXIMĂRI ŞI APROXIMAŢII

Numerele reale ne apar ca rezultat al unor măsurări sau al unor calcule.

Reamintim că „a măsura" un obiect înseamnă a-l compara cu un alt obiect de acelaşi fel, ales ca unitate de măsură. Practic nu există posibilitatea unei măsurări exacte; precizia oricărei măsuri depinde de instrumentul de măsură folosit.

1) De exemplu, să privim figura 9. Să măsurăm cu rigla (gradată în mm) laturile; obţinem că segmentul AB are lungimea cuprinsă între 2,1 cm şi 2,2 cm, iar segmentul BC are şi el lungimea cuprinsă între 2,1 cm şi 2,2 cm.

Putem afirma oare că patrulaterul $ABCD$ este un pătrat ? Cu toate că şi lungimile segmentelor CD şi DA sînt cuprinse între 2,1 cm şi 2,2 cm, nu putem afirma aceasta; s-ar putea întîmpla ca, măsurînd lungimile cu un instrument de măsură mai precis, să obţinem că lungimea segmentului AB este $< 2,13$ cm, iar lungimea segmentului BC este $> 2,13$ cm.

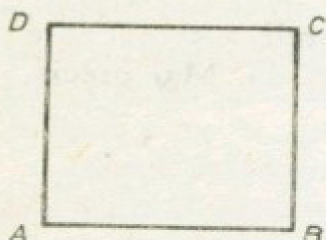


Fig. 1.9.

Să acceptăm totuşi ideea că patrulaterul $ABCD$ ar fi un pătrat. Lungimea (în cm) unei laturi a acestui pătrat este dată de un număr real l. Măsurînd cu rigla, am stabilit că acest număr este mai mare decît 2,1 şi mai mic decît 2,2 :

$$2,1 < l < 2,2.$$

În practică îl aproximăm pe l, de exemplu cu numărul 2,15. Scriem $l \approx 2,15$ şi citim „l este aproximativ 2,15". Spunem că „lungimea laturii pătratului este aproximativ de 2,15 cm".

Nu este obligatoriu să-l aproximăm pe l prin 2,15; îl putem aproxima prin multe alte numere, ca de exemplu 2,13; 2,1; 2,2 sau chiar 2.

Aproximîndu-l pe l printr-un număr a, facem o eroare*.

Să ne ocupăm acum de aria pătratului. Ce putem spune despre această arie (măsurată în cm^2) ? Formula $A = l^2$ ne arată că avem

$$2,1^2 < A < 2,2^2,$$

adică

$$4,41 < A < 4,84.$$

Putem aproxima de exemplu numărul A prin 4,5; scriem

$$A \approx 4,5,$$

acceptînd astfel că aria pătratului este aproximativ 4,5 cm^2. Putem scrie şi că $A \approx 4,8$, acceptînd astfel că aria pătratului este aproximativ de 4,8 cm^2.

---

* Cuvîntul „eroare" are în matematică înţelesul de „greşeală involuntară, inevitabilă". De obicei, prin „eroare a unei aproximări" înţelegem valoarea absolută a diferenţei dintre aproximare şi numărul pe care-l aproximează. În practică alegerea unei aproximaţii se face în aşa fel încît precizia ei să ne satisfacă.

De regulă, în practică aproximăm măsurile obiectelor (care sînt date de numere reale) prin numere raţionale scrise zecimal, avînd de obicei doar cîteva zecimale.

2) Ştim că, pentru orice cerc, raportul dintre lungimile circumferinţei şi diametrului său (măsurate cu aceeaşi unitate de măsură) este numărul real π care se scrie zecimal cu o infinitate de cifre :

$$3{,}14159265358979323 8\ldots .$$

În tehnică, în fizică, în astronomie se lucrează nu cu acest număr, ci cu aproximări ale sale, ca de exemplu :

$$3{,}14\ ;\ 3{,}141\ ;\ 3{,}1415 \text{ sau } 3{,}141593,$$

după necesităţi.

Să observăm că înlocuind (aproximînd) pe π cu 3,14 facem o eroare mai mică decît 0,01, deoarece

$$|\,3{,}14 - \pi\,| = 0{,}00159\ldots \leq 0{,}01.$$

Aproximînd pe π cu 3,1415, facem o eroare mai mică decît 0,0001 ; aproximaţia 3,1415 este **mai precisă** decît 3,14.

3) Citim pe eticheta unei sticle de oţet :

Conţinut 1 000 ± 20 ml.

Aceasta înseamnă că, dacă sticla conţine x ml de oţet, atunci

$$1\,000 - 20 \leq x \leq 1\,000 + 20.$$

Numărul x este aproximat de 1 000, cu o eroare ce nu depăşeşte 20.

Pe eticheta unui borcan de muştar citim :

Conţine 445 ± 13 g.

Pe un rezistor electric, ce se foloseşte în construcţia aparatelor de radio, este imprimat :

$$20\ \text{k}\Omega \pm 5\%.$$

Dacă rezistorul a fost fabricat de R kiloohmi, atunci

$$20 - 1 \leq R \leq 20 + 1,$$

deoarece 5% din 20 kiloohmi este 1 kiloohm. Valoarea rezistenţei este aproximată de 20 kiloohmi, cu eroare de cel mult 1 kiloohm.

Cele de mai sus ne justifică următoarea definiţie :

Vom spune că numărul a aproximează numărul x cu o eroare de cel mult e, dacă

$$a - e \leq x \leq a + e.$$

Aceasta înseamnă de fapt că $x \in [a - e;\ a + e]$, sau că $|\,a - x\,| \leq e$.

Astfel, 3,14 aproximează pe π cu eroare de cel mult 0,01 ; 3,1415 aproximează pe π cu eroare de cel mult 0,0001, iar 1,8 aproximează pe 1,807 cu eroare de cel mult 0,01, căci

$$|1{,}8 - 1{,}807| = 0{,}007 \leq 0{,}01.$$

Numărul e este pozitiv. De obicei, e este „mic" (comparativ cu numărul a) şi este ales de forma 10^{-n} unde $n \in \mathbf{N}$.

Dacă $e = 10^{-1} = 0{,}1$, se spune că a aproximează pe x cu eroare de cel mult o zecime ; dacă $e = 10^{-2} = 0{,}01$, se spune că a aproximează pe x cu eroare de cel mult o sutime etc.

EXERCIŢII REZOLVATE

1) Care dintre numerele 2,14 şi 2,15 aproximează pe $\frac{15}{7}$ cu eroare de cel mult 0,01 ?

Luînd $a = 2{,}14$, $e = 0{,}01$ şi $x = \frac{15}{7} = 2{,}142...$, constatăm că este adevărat că $2{,}14 - 0{,}01 \leq \frac{15}{7} \leq 2{,}14 + 0{,}01$. De asemenea, este adevărat că $2{,}15 - 0{,}01 \leq$ $\leq \frac{15}{7} \leq 2{,}15 + 0{,}01$. Aşadar amîndouă numerele 2,14 şi 2,15 aproximează pe $\frac{15}{7}$ cu eroare de cel mult 0,01.

2) Pentru numărul π, care aproximare este mai bună : 3,14 sau 3,15 ? 3,14 sau 3,144 ?

Să comparăm între ele numerele $|3{,}14 - \pi|$ şi $|3{,}15 - \pi|$. Avem : $|3{,}14 - \pi| = \pi - 3{,}14 = 0{,}00159...$ iar $|3{,}15 - \pi| = 3{,}15 - \pi = 0{,}0084...$ şi astfel 3,14 aproximează mai precis pe π decît 3,15.

De asemenea, deoarece $|3{,}144 - \pi| = 3{,}144 - \pi = 0{,}0024...$ este mai mare decît $|3{,}14 - \pi|$, numărul 3,14 aproximează mai precis pe π şi decît 3,144.

EXERCIŢII

1) Scrieţi zecimal numărul $\frac{2}{7}$; aproximaţi-l apoi prin alte trei numere, cu eroare de cel mult o miime.

2) Numărul $\frac{5}{11}$ este aproximat prin 0,45 şi 0,46. Care dintre aceste aproximaţii o consideraţi mai precisă ? Dar dintre aproximaţiile 0,454 şi 0,455 ?

3) Putem spune că numărul 1,9 aproximează pe 1,8971 cu eroare de cel mult : a) 0,1; b) 0,01; c) 0,005; d) 0,001 ?

4) Aflaţi numărul x, ştiind că :

a) $|a - x| = 0{,}2$ şi $a = 5{,}3$; b) $|x - a| = 0{,}1$ şi $a = 10$; c) $|a - x| = 0{,}01$ şi $a = \frac{3}{4}$.

5) Ştim că numerele 3,14 şi 3,15 aproximează un număr x cu eroare de cel mult 0,01. Puteţi scrie un alt număr care aproximează pe x cu eroare de cel mult 0,01 ?

6) Ştim că $x \in [1,723; 1,732]$. Arătaţi că extremităţile intervalului aproximează pe x cu eroare de cel mult 0,01.

7*) Dacă $x \in [3,226; 3,245]$, arătaţi că cel puţin una dintre extremităţile intervalului îl aproximează pe x cu eroare de cel mult 0,01.

8) Pe eticheta unei sticluţe cu cerneală este scris : 30 ± 3 ml. Ce puteţi spune despre cantitatea de cerneală din sticluţă ?

9) Aproximaţi numărul $\frac{18}{13}$ printr-un număr raţional scris ca fracţie cu numitorul 100. Ce puteţi spune despre eroarea aproximării ?

8. ECUAŢII ŞI SISTEME DE ECUAŢII

Să ne amintim că o **ecuaţie** este o propoziţie cu variabilă (propoziţiile cu variabilă se mai numesc **predicate**), în care apare, o singură dată, semnul „=".

De exemplu, să considerăm propoziţiile cu variabilă (predicatele) :

1) Elevul cu numele **x** este în clasa a VIII-a A, $\mathbf{x} \in$ {Ionescu, Popescu, Constantinescu} ;

2) $2\mathbf{x} - 5 = 2$, $\mathbf{x} \in \{0, 1, 2, 3\}$;

3) Litera **x** este în alfabetul latin, $\mathbf{x} \in \{a, b, \pi, \rho, x\}$;

4) $2\mathbf{x} + \mathbf{y} = 7$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{N}$;

5) $\frac{2\mathbf{x} + 3}{3\mathbf{x}^2 + 1} = 2$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$;

6) $4\mathbf{x} - 1 = 1 = \mathbf{x} + 2$, $\mathbf{x} \in \{1, 2\}$.

Prima, a treia şi a şasea nu sînt ecuaţii. A doua şi a cincea sînt ecuaţii cu o necunoscută, iar a patra este o ecuaţie cu două necunoscute.

Mulţimea în care ia valori necunoscuta se precizează în dreptul ecuaţiei ; în cazul în care nu este scrisă, vom considera că este mulţimea numerelor reale.

O ecuaţie cu o necunoscută are forma generală :

$$S(\mathbf{x}) = D(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in M\ ;$$

necunoscuta **x** apare *efectiv* în enunţul ecuaţiei, în membrul stîng S sau în membrul drept D.

Necunoscuta poate fi înlocuită, în enunţul ecuaţiei, cu orice element din mulţimea M ; ca rezultat enunţul poate exprima sau nu un adevăr. Acele elemente ale lui M care înlocuite în enunţ, în locul necunoscutei, fac ca enunţul să exprime un adevăr, vor fi numite **soluţii** ale ecuaţiei. **Rezolvarea** unei ecuaţii înseamnă aflarea tuturor soluţiilor sale.

De exemplu, prin înlocuire directă, constatăm că ecuaţia

$$2\mathbf{x} - 5 = 2,\ \mathbf{x} \in \{0, 1, 2, 3\}$$

nu are nici o soluţie. Însă ecuaţia

$$2\mathbf{x} - 5 = 2,\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}$$

are o soluţie (şi numai una), numărul 3,5.

EXERCIȚII

1) Verificați dacă : a) 2 este sau nu soluție a ecuației $\frac{x+1}{3} - \frac{x}{2} - 1 = \frac{5x-6}{4}$, $x \in \mathbf{R}$; b) -4 este sau nu soluție a ecuației $(x-5)^2 + (x+6) \cdot (x-6) = 2(x+3)^2$, $x \in \mathbf{R}$.

2) Care dintre numerele : $-3, -2, -\frac{5}{3}, -1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 3$ este soluție a ecuației :

a) $2x+3 = x+1$, $x \in \mathbf{R}$; b) $x^2 + 1 = 4$, $x \in \mathbf{R}$; c) $1 - x^2 = -8$, $x \in \mathbf{R}$; d) $2x + 3 = 4x - 1$, $x \in \mathbf{R}$?

3) Ecuația $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$, $x \in \mathbf{R}$ are :

a) o soluție ; b) nici o soluție ; c) mai mult de două soluții ; d) două soluții. Care răspuns este corect ?

Două ecuații sînt numite **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

În rezolvarea ecuațiilor se folosesc următoarele două proprietăți ale egalității (valabile pentru numere reale) :

Proprietatea 1. Adunînd la (sau scăzînd din) ambii membri ai unei ecuații același număr real, obținem o altă ecuație, echivalentă cu prima.

Conform acestei proprietăți, putem trece termeni dintr-un membru într-altul, schimbîndu-le semnul.

Proprietatea 2. Înmulțind (sau împărțind) ambii membri ai unei ecuații cu același număr real, diferit de 0, obținem o altă ecuație, echivalentă cu prima.

De exemplu, să rezolvăm ecuația : $3x - 1 = 9$, $x \in \mathbf{R}$.

Adunînd la ambii membri numărul 1, obținem ecuația $3x = 9 + 1$, $x \in \mathbf{R}$, echivalentă cu prima. Împărțim acum ambii membri cu 3 : obținem ecuația $x = \frac{10}{3}$, $x \in \mathbf{R}$, care este echivalentă cu prima. Această ultimă ecuație are evident o singură soluție, numărul $\frac{10}{3}$. Deci și ecuația $3x - 1 = 9$, $x \in \mathbf{R}$ are o singură soluție, numărul $\frac{10}{3}$.

O ecuație de forma

$$ax + b = 0,\ x \in \mathbf{R}$$

în care $a \neq 0$ și b sînt numere reale, este numită **ecuație de gradul I cu o necunoscută.** Am învățat în clasa a VII-a că orice ecuație de gradul I cu o necunoscută are o singură soluție, numărul $-\frac{b}{a}$.

EXERCIȚIU REZOLVAT

Să rezolvăm ecuația $ax + 3 = 4x - 2a$, $x \in \mathbf{R}$, în care a este un parametru real.

Trecem în membrul stîng toți termenii în care apare necunoscuta, iar în membrul drept ceilalți termeni ; ecuația este înlocuită cu ecuația echivalentă :

$$-4x + ax = -2a - 3, x \in \mathbf{R},$$

sau

$$(a - 4)x = -2a - 3, x \in \mathbf{R}.$$

Distingem două cazuri :

1) $a \neq 4$. În acest caz împărţim ambii membri ai ecuaţiei cu numărul $a - 4$ (care este $\neq 0$) ; obţinem astfel ecuaţia echivalentă

$$x = \frac{-2a - 3}{a - 4}, x \in \mathbf{R}$$

care are evident o singură soluţie : numărul $\frac{-2a - 3}{a - 4}$.

2) $a = 4$. În acest caz ecuaţia se scrie :

$$0 \cdot x = -2 \cdot 4 - 3, x \in \mathbf{R} ;$$

această ecuaţie nu are nici o soluţie.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Într-un vas s-a turnat acid sulfuric, mai întîi 0,8 l cu concentraţia de 12% apoi 1,2 l cu concentraţia de 20%. Cît acid sulfuric cu concentraţia de 15% mai trebuie turnat, pentru a obţine o concentraţie a amestecului de 16% ? Dar de 18% ?

Rezolvare. Să notăm cu x cantitatea (în litri) de acid sulfuric cu concentraţia de 15% ce trebuie turnată în vas pentru a obţine amestecul dorit. Totalizînd acidul sulfuric pur din cele trei componente ale amestecului, obţinem pe de o parte $0,8 \cdot \frac{12}{100} + 1,2 \cdot \frac{20}{100} + x \cdot \frac{15}{100}$ litri, iar pe de altă parte $(0,8 + 1,2 + x) \cdot \frac{16}{100}$ litri. Rezolvînd ecuaţia :

$$0,8 \cdot \frac{12}{100} + 1,2 \cdot \frac{20}{100} + x \cdot \frac{15}{100} = (0,8 + 1,2 + x) \cdot \frac{16}{100}$$

obţinem soluţia $x = 1,6$. Deci, pentru a obţine un amestec cu concentraţia de 16%, va trebui să mai turnăm în vas 1,6 l acid sulfuric cu concentraţia de 15%.

În acelaşi mod, să încercăm să răspundem la a doua întrebare. De data aceasta sîntem conduşi la ecuaţia

$$0,8 \cdot \frac{12}{100} + 1,2 \cdot \frac{20}{100} + x \cdot \frac{15}{100} = (0,8 + 1,2 + x) \cdot \frac{18}{100}$$

care are soluţia $-0,8$. Această soluţie fiind negativă, putem spune că nu este posibil să mai obţinem (în condiţiile date) amestec cu concentraţia de 18%.

EXERCIȚII

1) Rezolvați ecuațiile de gradul I :

a) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5} = 0$; b) $0{,}25\,x - 1{,}8 = 0$; c) $-\frac{3}{5}x + 2 = 0$; d) $1{,}15\,x + 3{,}31 = 0$.

Scrieți soluțiile sub formă zecimală.

2) Știm că 6 este soluție a ecuației $\frac{5}{2}x + m = 5$, $x \in \mathbf{R}$. Aflați numărul m. Ecuația mai are și alte soluții ?

3) Este adevărat că ecuația $2 + \frac{5}{2}x = \frac{5x + 4}{2}$, $x \in \mathbf{R}$, are soluția 0 ? Rezolvați-o !

4) Rezolvați ecuația : $\frac{x}{1{,}6} + 3{,}11 = 4{,}03$.

5) Rezolvați ecuațiile :

a) $8x - 3 = 5x - \frac{1}{2}(11x - 5)$; b) $\frac{1}{2}(2x - 1) + \frac{1}{4}(4x - 1) + \frac{1}{8}(8x - 1) + \frac{1}{8} = 2x$;

c) $(x - 3)(x - 5) + 2 = (x - 4)^2 + \frac{x}{6}$; d) $(3 - 4x)^2 + (4 - 3x)^2 = (5x - 5)^2$; e) $(1 - 12x)^2 + (2 - 5x)^2 = (3 - 13x)^2$; f) $(x + 2)(x + 3) - 6 = (x + 5)(4 + x) - 12$;

g) $\frac{4x + 1}{3 - 8x} = \frac{1 - 2x}{3 + 8x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right\}$; h) $\frac{1 - 2x}{3 - 4x} - \frac{5 - 3x}{4 - 6x} = 0$, $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\}$.

6) Rezolvați ecuațiile, analizînd toate cazurile ce pot apărea (a și m sînt parametri reali) :

a) $a^2 - x = 1 + ax$; b) $\frac{x}{a} - \frac{x}{a - 1} = \frac{a}{a + 1}$; c) $\frac{x}{a} + 2 = ax + 1$;

d) $(m + 1)x + a = x$; e) $a(x - a) = m(x - m)$.

7) Pentru ce valori ale parametrului a, ecuația

$$-2(a - 1)^2x + 2a(ax - 2) = (5a - 1)x$$

nu are o singură soluție ?

Să luăm de exemplu ecuația :

$$2x + y = 4,\ x, y \in \mathbf{R}.$$

Ea este o ecuație de gradul I cu două necunoscute. Înlocuind necunoscuta x cu $\frac{1}{2}$, iar necunoscuta y cu 3, obținem propoziția adevărată : $2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 4$. Putem spune astfel că perechea $\left(\frac{1}{2};\ 3\right)$ este soluție a ecuației. Putem constata, prin înlocuire directă, că și perechile (0; 4), (1; 2), (2; 0), (3; −2) sînt soluții ale ecuației. Orice soluție a ecuației are forma $(t;\ 4 - 2t)$, unde t este un număr real.

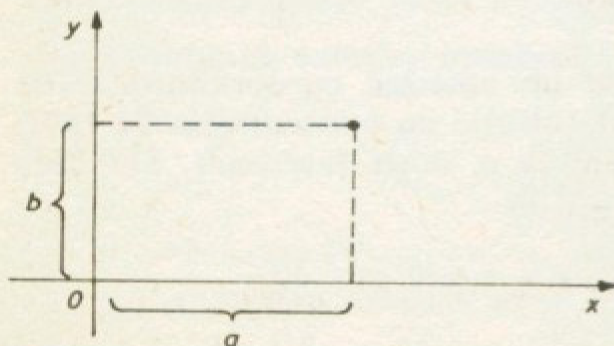


Fig. 1.10

Orice pereche de numere reale $(a; b)$ poate fi identificată cu un punct din plan, ce are **abscisa** a și **ordonata** b (vezi figura 10). În clasa a VII-a am arătat că mulțimea soluțiilor ecuației poate fi identificată cu o dreaptă din planul xOy (vezi figura 11).

O ecuație de gradul I cu două necunoscute **x** și **y** are forma

$$ax + by + c = 0, \; x, y \in \mathbf{R}$$

unde $a \neq 0$ sau $b \neq 0$. Soluțiile acestei ecuații sînt perechi de numere reale.

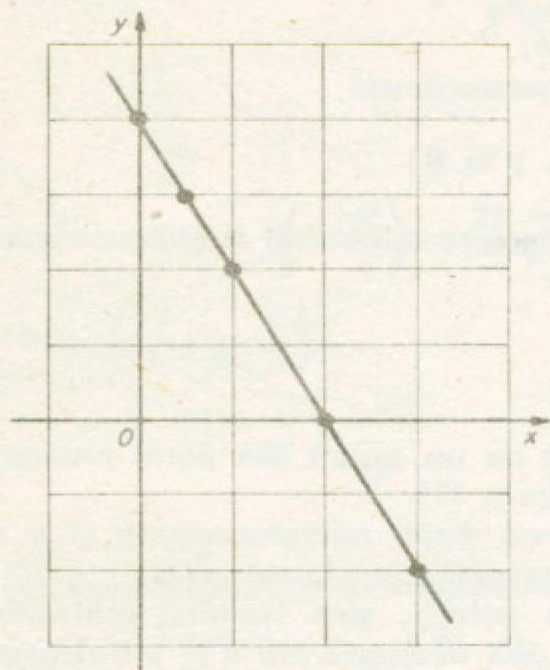


Fig. I.11

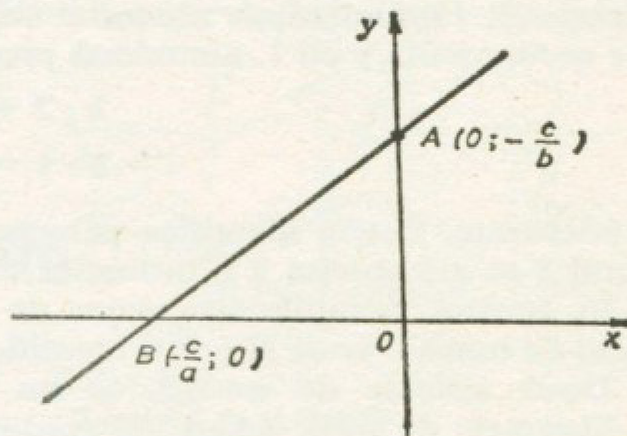


Fig. I.12

Aceste perechi se identifică cu punctele unei drepte din planul xOy. Dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$, această dreaptă este determinată de punctele

$$A\left(0; -\frac{c}{b}\right) \text{ și } B\left(-\frac{c}{a}; \quad 0\right) \text{ (fig. 12).}$$

Ce se întîmplă dacă $a = 0$ sau dacă $b = 0$?

EXERCIȚII

1) Reprezentați, într-un sistem de coordonate, dreapta soluțiilor ecuației :

a) $3x + 2y - 6 = 0$; b) $5x - y - 8 = 0$; c) $-4x - 2y - 3 = 0$; d) $-2x + 5y = 12$.

2) Reprezentați în același sistem de coordonate, dreptele :

a) $2x - y - 4 = 0$; b) $x + y + 1 = 0$; c) $4x - 4y = 12$; d) $2x + y = 0$. Ce observați ?

3*) Reprezentați în același sistem de coordonate dreptele de ecuații $4x + 2y - 5 = 0$ și $6x + 3y - 9 = 0$. Puteți dovedi că ele sînt paralele ?

Un **sistem de ecuaţii** este format din două sau mai multe ecuaţii, cu aceleaşi necunoscute. De exemplu,

$$\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 1 + x = y - 1 \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbf{R})$$

este un sistem de ecuaţii cu două necunoscute. La fel,

$$\begin{cases} x - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad \text{şi chiar} \quad \begin{cases} x - 5 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

sînt sisteme de două ecuaţii cu două necunoscute.

Să luăm sistemul de două ecuaţii cu două necunoscute

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3y = 3. \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbf{R})$$

Perechea (2; 1) este soluţie a acestui sistem, deoarece înlocuind necunoscuta x cu 2, iar necunoscuta y cu 1, amîndouă propoziţiile

$$2 \cdot 2 + 1 = 5$$

şi

$$3 \cdot 1 = 3$$

sînt adevărate. Putem identifica perechea (2; 1) cu un punct din plan, anume cu punctul S ce are abscisa 2 şi ordonata 1 (vezi figura 13).

În general, soluţiile sistemelor de ecuaţii cu două necunoscute x şi y sînt perechi de numere reale şi pot fi identificate cu puncte din planul xOy.

Două sisteme de ecuaţii, ce au aceleaşi soluţii, sînt numite **echivalente.**

Sistemele de două ecuaţii de gradul I cu două necunoscute x şi y au forma :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad (x,\ y \in \mathbf{R})$$

Am învăţat în clasa a VII-a mai multe metode de rezolvare a unor astfel de sisteme.

De exemplu, să rezolvăm sistemul $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -4x + 7y = 2 \end{cases}$,

prin metoda reducerii.

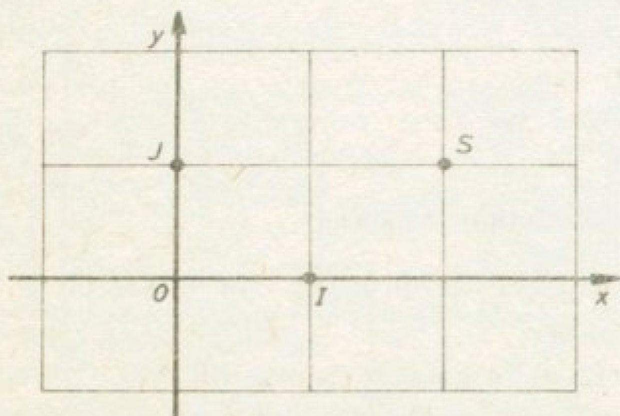


Fig. 1.13

Înmulţim ambii membri ai primei ecuaţii cu 4, iar ambii membri ai celei de-a doua cu 3 ; obţinem sistemul :

$$\begin{cases} 12x - 8y = 20 \\ -12x + 21y = 6. \end{cases}$$

Adunăm acum membru cu membru cele două ecuaţii ; obţinem :

$$13y = 26,$$

de unde $y = 2$.

Din prima ecuaţie obţinem $3x = 5 + 2y$, adică $3x = 5 + 2 \cdot 2$, deci $x = 3$. Soluţia sistemului este deci perechea $(3; 2)$.

Să rezolvăm sistemul $\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ prin metoda substituţiei. Din prima ecuaţie obţinem $x = 3 + 4y$; înlocuim în a doua :

$$3(3 + 4y) + 2y = 5.$$

Aceasta este o ecuaţie doar în necunoscuta y, pe care o rezolvăm :

$$9 + 12y + 2y = 5,$$

$$14y = -4,$$

$$y = -\frac{2}{7}.$$

Aşadar $x = 3 + 4 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{21 - 8}{7} = \frac{13}{7}$. Soluţia sistemului este deci perechea $\left(\frac{13}{7}; -\frac{2}{7}\right)$.

EXERCIŢII

1) Rezolvaţi prin metoda reducerii sistemele :

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 4x - 3y = 9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 8x - 3y = 2 \\ 2x - 5y + 1 = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ 2x + 10y = 3 \end{cases}$.

2) Rezolvaţi prin metoda substituţiei sistemele :

a) $\begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ -x + y + 1 = 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 4x - 6y + 10 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x + 3y + 4 = 0 \\ 5x + 4y = 13 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 3x + 5y + 1 = 0 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

3) Rezolvaţi sistemele (alegeţi-vă singuri metoda de rezolvare) :

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 2x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x - 5y = 0 \\ 4x + 10y = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 4x - 10y = 3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$; e) $\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}y = 18 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 21 \end{cases}$.

Să considerăm sistemul de două ecuaţii de gradul I, cu două necunoscute :

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c\ = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}.$$

Ştim că mulţimea soluţiilor primei ecuaţii se identifică cu o dreaptă (d) din planul xOy; soluţiile celei de-a doua ecuaţii se identifică cu punctele dreptei

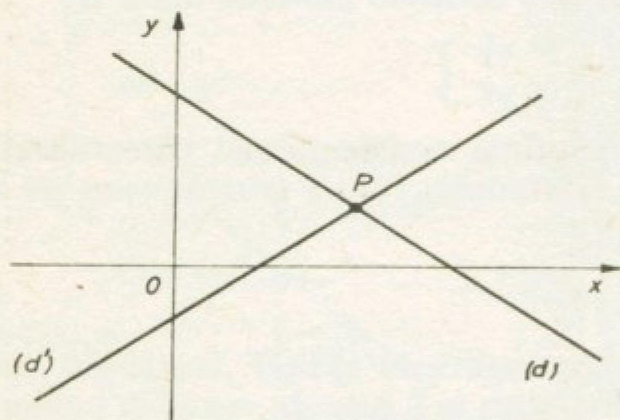


Fig. I.14

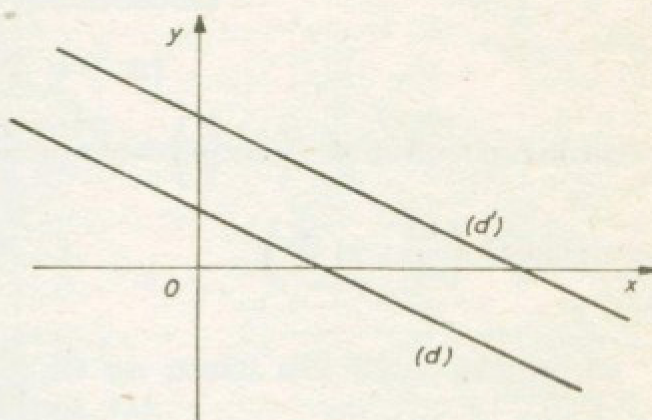


Fig. I.15

(d') (vezi figura 14). Soluţia sistemului se identifică cu punctul P de intersecţie a celor două drepte. În acest caz sistemul este **compatibil determinat.**

Dar se poate întîmpla ca cele două drepte (d) şi (d') să fie paralele, ca în figura 15. În acest caz sistemul de ecuaţii nu are nici o soluţie ; se spune că sistemul este, în acest caz, **incompatibil.**

De exemplu, să considerăm sistemul :

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} (x, y \in \mathbf{R}).$$

Dacă reprezentăm într-un sistem de coordonate xOy dreptele soluţiilor celor două ecuaţii ce formează sistemul (vezi figura 16), constatăm că ele sînt paralele. Dacă sistemul ar avea ca soluţie perechea $(x ; y)$, atunci am avea $x + y = 1$ şi $x + y = 2$, ceea ce este absurd. Sistemul este deci incompatibil.

Se mai poate întîmpla ca dreapta (d') să fie aceeaşi cu dreapta (d). În acest caz sistemul de ecuaţii are mai multe soluţii ; fiecărui punct al dreptei (d) îi corespunde o soluţie a sistemului Se spune că sistemul este, în acest caz, **compatibil,** însă **nedeterminat.**

Să considerăm sistemul :

$$\begin{cases} 2x - \ \ y - 1 = 0 \\ 4x - 2y - 2 = 0 \end{cases} (x, y \in \mathbf{R}).$$

Amîndouă ecuaţiile ce formează sistemul au aceeaşi dreaptă a soluţiilor, reprezentată în figura 17. Deci sistemul are mai multe soluţii ; mai precis, soluţiile sale sînt perechile de forma $(x\ ;\ 2x-1)$, unde $x \in \mathbf{R}$. Putem spune că sistemul este compatibil nedeterminat.

Observăm că a doua ecuaţie se obţine din prima prin înmulţire cu 2.

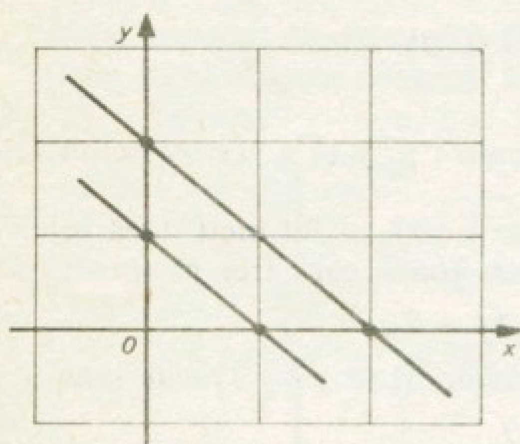


Fig. I.16

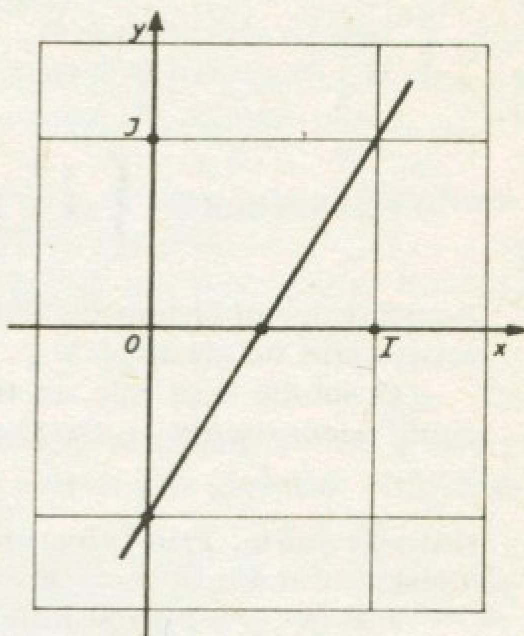


Fig. I.17

EXERCIŢII

1) Rezolvaţi sistemele de ecuaţii :

a) $\begin{cases} 90x + 100y - 3 = 0 \\ 100x + 110y = 1{,}5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 4 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 12 \\ \frac{5}{6}x - \frac{1}{4}y = 4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 0{,}1x + 1{,}7y = 30 \\ 1{,}1x - 0{,}1y = 10{,}4 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 10x + 7y = 14{,}7 \\ 11x - 10y = 5{,}1 \end{cases}$.

2) Rezolvaţi sistemele de ecuaţii :

a) $\begin{cases} \frac{4x + 81}{10y - 17} = 6 \\ 4x - 20y + 55 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{1}{x + y} = \frac{2}{x - y} \\ \frac{2}{3x + 7y} = \frac{3}{2x - 9} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \frac{9x + 2y - 1}{3} = \frac{12x - 3y - 1}{10} \\ \frac{6x - 3y + 1}{4} - \frac{3x - 2y + 2}{6} = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \frac{13}{x + 2y + 3} = -\frac{3}{4x - 5y + 6} \\ \frac{3}{6x - 5y + 4} = \frac{19}{3x + 2y + 1} \end{cases}$.

3) Rezolvaţi sistemele de ecuaţii :

a) $\begin{cases} (x+1)(y+2) = (x-1)(y+1) + 18 \\ (2x+1)(y-4) = (x+2)(2y-3) - 31 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{x-2}{y-3} \\ \dfrac{x-2}{y-1} = \dfrac{x+5}{y+3} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (x+1)y = (x+5)(y-4) \\ (x+2)(y+4) = (x+4)y \end{cases}$.

Fie sistemul : $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 5y + 7z = 24 \\ -3y + 8z = -1 \end{cases}$ $(x, y, z \in \mathbf{R})$.

Acesta este un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute : **x, y** şi **z**. Toate cele trei ecuaţii sînt de gradul I.

O soluţie a sa este un **triplet** de numere reale $(x ; y ; z)$, astfel încît dacă înlocuim necunoscuta **x** cu x, pe **y** cu y iar pe **z** cu z, toate cele trei propoziţii :

$$x + y + z = 6,\ x + 5y + 7z = 24 \text{ şi } -3y + 8z = -1,$$

sînt adevărate. Prin înlocuire directă, constatăm că tripletul (2 ; 3 ; 1) este soluţie a sistemului.

Fie $(x ; y ; z)$ o soluţie a sistemului. Din faptul că propoziţia $x + y + z = 6$ este adevărată, deducem că $x = 6 - y - z$. Din faptul că propoziţia $x + 5y + 7z = 24$ este adevărată, înlocuind pe x, obţinem $(6 - y - z) + 5y + 7z = 24$. Mai ştim că propoziţia $-3y + 8z = -1$ este adevărată ; aşadar perechea $(y ; z)$ este o soluţie a sistemului

$$\begin{cases} (6 - y - z) + 5y + 7z = 24 \\ -3y + 8z = -1 \end{cases}.$$

Rezolvînd acest sistem, obţinem $y = 3$, $z = 1$. Acum $x = 6 - 3 - 1 = 2$. Ajungem la concluzia că tripletul (2 ; 3 ; 1) este singura soluţie a sistemului de trei ecuaţii cu trei necunoscute.

Să observăm că în rezolvarea sa am folosit metoda substituţiei : din prima ecuaţie a sistemului am „scos" necunoscuta **x** în funcţie de celelalte apoi am înlocuit-o în celelalte ecuaţii ale sistemului (mai precis, doar într-a doua). Am obţinut astfel un sistem de două ecuaţii, în necunoscutele **y** şi **z**.

Să aplicăm metoda substituţiei şi pentru rezolvarea sistemului :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 13, \\ 3x + 2y - 2z = 13, \\ 5x - 4y - 2z = 11. \end{cases}$$

Observăm că cel mai comod este să „scoatem" din prima ecuaţie pe **z** : $z = 2x + 3y - 13$. Să înlocuim în celelalte :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2(2x + 3y - 13) = 13, \\ 5x - 4y - 2(2x + 3y - 13) = 11. \end{cases}$$

Efectuînd calculele, acest sistem de ecuaţii se transformă în :

$$\begin{cases} -x - 4y = -13 \\ x - 10y = -15 \end{cases};$$

rezolvîndu-l, obţinem $x = 5$ şi $y = 2$. Apoi $z = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 - 13 = 3$. Deci soluţia sistemului este tripletul (5 ; 2 ; 3)

Alt exemplu : sistemul
$$\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ x - y = 1 \\ x + 2z = 5 \end{cases}.$$

Vom scoate, de exemplu, din a doua ecuaţie $y = x - 1$, şi vom înlocui în prima (în a treia nu este nevoie). Obţinem sistemul în **x** şi **z** :

$$\begin{cases} 2x + (x - 1) + z = 9 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$$

Rezolvîndu-l, obţinem $x = 3$, $z = 1$; sistemul are ca soluţie tripletul (3; 2; 1).

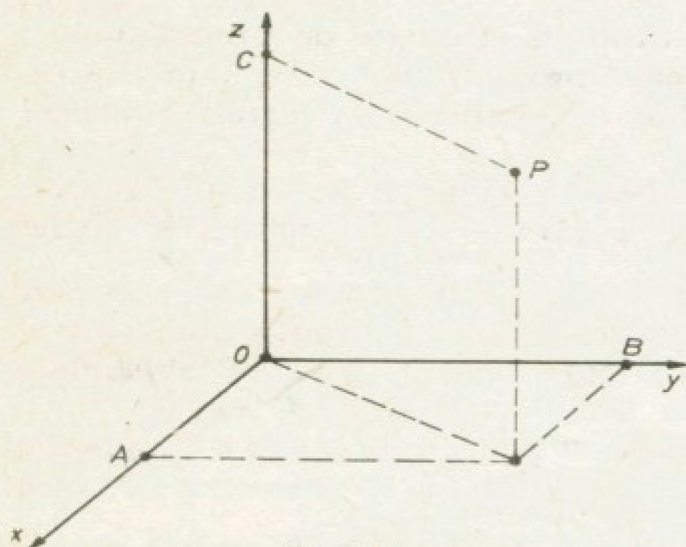


Fig. I.18

Tripletele $(x; y; z)$ pot fi identificate cu puncte ale spaţiului, înzestrat cu un sistem de coordonate Oxyz (vezi figura 18). Mai precis, tripletul $(x, y; z)$ se identifică cu punctul P ce are **abscisa** x, **ordonata** y şi **cota** z. (În figura 19 abscisa lui P este lungimea segmentului OA, ordonata lui P este lungimea segmentului OB, iar cota lui P este lungimea segmentului OC.)

EXERCIŢII

1) Rezolvaţi sistemele de ecuaţii :

a) $\begin{cases} x + y = 16 \\ y + z = 28 \\ x + z = 22 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + z = 40 \\ 2x - 3y = 0 \\ 5y - 6z = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x + 4z = 47 \\ 2y - 5z = -34 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ x - y + 2z = 18 \\ x - 2y - 2z = -30 \end{cases}$. e) $\begin{cases} -x + z = 6 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ -x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$.

2*) Rezolvaţi sistemele de ecuaţii :

a) $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = 42 \\ \frac{1}{4}x = \frac{1}{3}y = \frac{1}{6}z \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 3y + z = 42 \\ \frac{x - 1}{4} = \frac{y + 1}{5} = \frac{z}{3} \end{cases}$.

9. PROBLEME

Multe probleme ridicate de practică pot fi rezolvate cu ajutorul unui model matematic. De obicei, un model matematic asociat unei probleme este format din ecuaţii şi inecuaţii, ce reflectă problema concretă.

Problema 1. Pentru construcţia a două blocuri de locuinţe de acelaşi tip au fost pregătite 212 panouri prefabricate. Un tractor cu remorcă transportă, la fiecare drum, cîte trei panouri la blocul mai apropiat. Pentru transportul spre blocul mai depărtat a fost alocat un alt tractor, ce poate transporta în remorcă, la fiecare drum, 4 panouri.

După o săptămînă, al doilea tractor a făcut cu 14 drumuri mai puţin decît primul şi au mai rămas să fie transportate 30 panouri.

Aflaţi cîte panouri mai trebuie transportate spre blocul mai apropiat şi cîte drumuri mai are de făcut primul tractor.

Rezolvare. Să notăm cu x numărul de drumuri efectuate de primul tractor (cel care transportă panouri spre blocul mai apropiat), iar cu y numărul de drumuri efectuate de cel de-al doilea, în acea săptămînă. Din textul problemei rezultă că $y = x - 14$.

În total primul tractor a transportat $3x$ panouri, iar al doilea $4y$ panouri. Rămînînd de transportat încă 30 panouri, avem $3x + 4y + 30 = 212$. Astfel x şi y formează soluţia sistemului de ecuaţii :

$$\begin{cases} y = x - 14 \\ 3x + 4y + 30 = 212 \end{cases}$$

Acest sistem de ecuaţii, împreună cu condiţiile $x \in \mathbf{N}$ şi $y \in \mathbf{N}$, formează modelul matematic al problemei. Rezolvînd sistemul, obţinem $x = 34$ şi $y = 20$.

Deci primul tractor a transportat $3 \cdot 34 = 102$ panouri. Pînă la epuizarea celor 106 panouri ce trebuie transportate spre blocul mai apropiat, ar mai trebui transportate 4 panouri, deci 2(!) transporturi cu primul tractor. Pentru blocul mai depărtat mai sînt de transportat 26 de panouri, adică 7(!) transporturi cu al doilea tractor. Puteţi găsi o organizare mai bună a transporturilor ?

Problema 2. În port, două conducte ce descărcau ţiţei dintr-un petrolier de 21 000 t trebuiau să-l descarce în 12 ore. După 5 ore, la conducta principală apare o defecţiune ; ea este imediat înlocuită cu conducta de rezervă, care are însă un debit de două ori mai mic. În consecinţă, descărcarea durează 15 ore. Puteţi afla debitele celor trei conducte ?

Rezolvare. Fie x debitul (în tone pe oră) al primei conducte, y debitul celei de-a doua, iar z debitul conductei de rezervă. Dacă descărcarea ar fi decurs normal, atunci în 12 ore conductele 1 şi 2 ar fi descărcat $12(x + y)$ tone ţiţei. În cele 5 ore de funcţionare normală ele descarcă $5(x + y)$ tone ; apoi, în cele $15 - 5 = 10$ ore rămase, conductele 2 şi de rezervă descarcă $10(y + z)$ tone.

În plus, ştim că $z = \frac{x}{2}$.

Aşadar x, y şi z formează soluţia sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} 12(x + y) = 21\,000 \\ 5(x + y) + 10(y + z) = 21\,000 \\ z = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

Acesta este *modelul matematic* al problemei. Rezolvîndu-l, obţinem $x = 1\,150$, $y = 600$, $z = 575$.

Problema 3. Din A pînă în C, trecînd prin B, sînt 104 km. Din A pînă în B, trecînd prin C, sînt 128 km, iar din B pînă în C, trecînd prin A, sînt 96 km. Aflaţi distanţele între A şi B, B şi C, A şi C.

Rezolvare. Să notăm cu x distanţa între A şi B, cu y distanţa între B şi C şi cu z distanţa între A şi C, măsurate în km. Astfel, distanţa între A şi C, trecînd prin B, este de $(x + y)$ km şi aşa mai departe. Numerele x, y şi z formează soluţia sistemului de ecuaţii :

$$\begin{cases} x + y = 104, \\ y + z = 128, \\ x + z = 96. \end{cases}$$

Rezolvîndu-l, obţinem $x = 36$, $y = 68$, $z = 60$.

Problema 4. Tatăl lui Ionică a depus la CEC suma de 4 000 lei pe două carnete : unul cu dobîndă de 3,5%, celălalt cu dobîndă de 5%. După un an a primit pentru suma depusă dobînzi în valoare de 185 lei. Cît a depus pe carnetul cu dobînda de 5% ?

Rezolvare. Notăm cu x suma depusă de tatăl lui Ionică pe carnetul cu dobîndă de 3,5% şi cu y suma depusă pe carnetul cu dobînda de 5%. Textul problemei se transpune în condiţiile :

$$x + y = 4\,000$$

$$\frac{3{,}5}{100}x + \frac{5}{100}y = 185$$

Obţinem $y = 3\,000$. Deci a depus 3 000 lei pe carnetul cu dobînda de 5%.

Problema 5. Studiindu-se în laborator dependenţa rezistenţei unui termistor de temperatură, au fost obţinute următoarele date :

temperatura T (în °C)	20	40	80
rezistenţa R (în kΩ)	1	0,3	0,1

Se bănuieşte că legătura între temperatura T şi rezistenţa R este descrisă de o lege de forma :

$$R = \frac{T + a}{bT + c}.$$

Determinaţi valorile lui a, b şi c. Care va fi rezistenţa termistorului la temperatura de 60° C ? (Se presupune că formula găsită este corectă.)

Rezolvare. Datele obţinute ne arată că a, b, c satisfac relaţiile :

$$1 = \frac{20 + a}{b \cdot 20 + c} \quad ; 0{,}3 = \frac{40 + a}{b \cdot 40 + c} \; ; 0{,}1 = \frac{80 + a}{b \cdot 80 + c}.$$

„Coeficienţii" a, b şi c formează astfel soluţia sistemului de ecuaţii :

$$\begin{cases} -\mathbf{a} + 20\mathbf{b} + \quad \mathbf{c} = 20, \\ -\mathbf{a} + 12\mathbf{b} + 0{,}3\mathbf{c} = 40, \\ -\mathbf{a} + \; 8\mathbf{b} + 0{,}1\mathbf{c} = 80. \end{cases}$$

Rezolvîndu-l, obţinem $a = -220$, $b = -20$, $c = 200$. Formula este deci următoarea : $R = \dfrac{T - 220}{-20T + 200}$.

Folosind această formulă, obţinem pentru temperatura de 60° C valoarea rezistenţei egală cu 0,16 kΩ.

PROBLEME

1) Aflaţi laturile unui triunghi, ştiind că adunînd cîte două laturi se obţine pe rînd 45 m, 52 m, 48 m.

2) Două triunghiuri sînt asemenea ; primul are laturile de lungime 7 cm, 10 cm şi 11 cm, iar al doilea are perimetrul de 70 cm. Aflaţi lungimile laturilor celui de-al doilea triunghi.

3) Un triunghi ABC are laturile de lungime a, b, c. Notînd cu M, N, P punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile triunghiului (M se află pe latura BC, N pe latura AC) aflaţi lungimile segmentelor BM, MC, AN, NC, BP şi PA. Caz particular : $a = 14$ cm, $b = 16$ cm, $c = 20$ cm.

4) Un container conţine 30 de televizoare şi 28 aparate de radio şi cîntăreşte 729 kg ; alt container de acelaşi tip conţine doar 10 televizoare şi 40 de aparate de radio, cîntărind 473 kg; un al treilea container la fel cu primele două conţine 16 televizoare şi 62 aparate de radio, cîntărind 601 kg. Aflaţi masa unui container gol, precum şi masa unui televizor. Toate televizoarele sînt de acelaşi tip. De asemenea, aparatele de radio.

5) Suma a trei numere naturale este 100. Dacă împărţim primul număr la al doilea obţinem cîtul 5 şi restul 1 ; dacă împărţim al doilea număr la al treilea, obţinem din nou cîtul 5 şi restul 1. Care sînt numerele ?

6) Un bazin cu capacitatea de 1 500 l poate fi umplut prin trei conducte prevăzute cu robinete. Lăsînd deschise doar robinetele primelor două conducte, bazinul se umple în 30 minute. Dacă deschidem robinetele conductelor 1 şi 3, bazinul se umple în 25 minute. Debitul celei de-a treia conducte este de 3 ori mai mare decît debitul celei de-a doua. Aflaţi debitele celor trei conducte. În cît timp s-ar umple bazinul, dacă ar fi lăsat deschis numai un robinet ?

10. RĂDĂCINA PĂTRATĂ ŞI CUBICĂ

În figura 19 am desenat un pătrat cu lungimea laturii de 4 cm. Să-i măsurăm diagonala AC cu rigla (gradată în mm). Lungimea d a diagonalei este cuprinsă între 5,6 şi 5,7 cm.

Aplicînd teorema lui Pitagora triunghiului dreptunghic ABC, obţinem

$$d^2 = 4^2 + 4^2,$$

adică : $d^2 = 32.$

Aşadar d este un număr real, cuprins între 5,6 şi 5,7, al cărui pătrat este 32. Acest număr se notează $\sqrt{32}$ şi se numeşte *rădăcina pătrată* a lui 32. Putem afla scrierea sa zecimală aplicînd lui 32 algoritmul de aflare a rădăcinii pătrate,

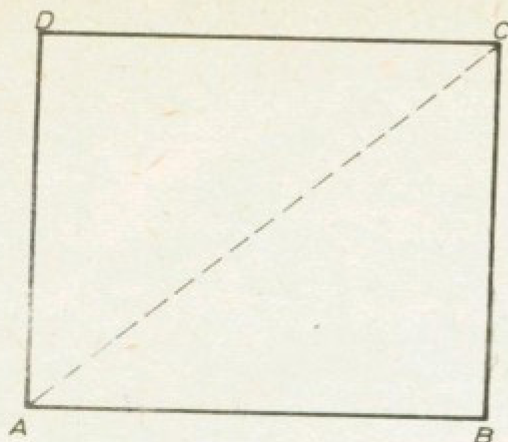


Fig. I.19

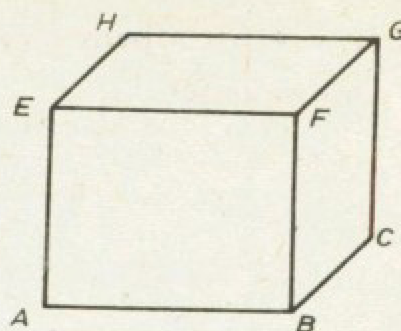


Fig. I.20

învăţat în clasa a VI-a. Obţinem :

$$\sqrt{32} = 5,656854\ldots .$$

În figura 20 am desenat un cub ce are volumul de 10 cm^3. Dacă i-am măsura muchia AB cu rigla, am constata că lungimea l a sa este cuprinsă între 2,1 şi 2,2 (cm).

Pe de altă parte, ştim că volumul cubului este l^3 cm^3. Deci :

$$l^3 = 10.$$

Aşadar l este un număr real, cuprins între 2,1 şi 2,2 al cărui cub este 10. Acest număr se notează $\sqrt[3]{10}$ şi se numeşte *rădăcina cubică* a lui 10 (sau radicalul de indice 3 din 10).

Atît numărul $\sqrt{32}$, cît şi numărul $\sqrt[3]{10}$, scrise zecimal, au o infinitate de cifre în dreapta virgulei, cifre care nu se repetă în mod periodic. De aceea, în practică sîntem nevoiţi să lucrăm cu aproximaţii ale lor, de forma 5,65 respectiv 2,15.

Definiţie. Fiind dat un număr real $a \geq 0$, vom numi **rădăcina pătrată** a lui a şi vom nota $\sqrt{a}$, numărul real ≥ 0 ce are proprietatea că pătratul său este a. Fiind dat un număr real b, vom numi **rădăcina cubică** a lui b şi vom nota cu $\sqrt[3]{b}$, numărul real ce are proprietatea că b este cubul său.

Observaţie. Nu putem vorbi despre rădăcina pătrată a lui —25, deoarece nu există nici un număr real al cărui pătrat să fie —25. De asemenea, cu toate că $(-6)^2 = 36$, rădăcina pătrată a lui 36 nu este —6, ci 6.

Exemple. Deoarece $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$, avem $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$; deoarece $0,12^2 = 0,0144$, avem $\sqrt{0,0144} = 0,12$.

Deoarece $2^3 = 8$, avem $\sqrt[3]{8} = 2$; deoarece $(-2)^3 = -8$, avem $\sqrt[3]{-8} = -2$.

De asemenea, $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$, $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Am învăţat în clasa a VII-a să lucrăm cu rădăcini pătrate. Vom reaminti principalele proprietăţi :

1) $(\sqrt{a})^2 = a$ pentru $a \geq 0$;

2) $\sqrt{a^2} = |a|$ pentru orice număr a ;

3) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ pentru $a \geq 0$ şi $b \geq 0$;

4) $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ pentru $a \geq 0$ şi $b > 0$,

care se mai scrie şi astfel :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

EXERCIŢII

1) Calculaţi :

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$; b) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}$; c) $\sqrt{450} \cdot \sqrt{50}$; d) $\sqrt{48} \cdot \sqrt{108}$.

2) Este adevărat că $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ pentru orice a, b ? Demonstraţi sau daţi un contraexemplu.

3) Scoateţi factori de sub radical :

a) $\sqrt{750}$; b) $\sqrt{160}$; c) $\sqrt{1620}$; d) $\sqrt{216}$; e) $\sqrt{2a^2}$; f) $\sqrt{2a^4}$; g) $\sqrt{2a^4b^3}$; h) $\sqrt{50a^3}$.

4) Introduceţi sub radical ;

a) $3\sqrt{0,5}$; b) $0,5\sqrt{3}$; c) $11\sqrt{5}$; d) $5\sqrt{11}$; e) $0,5\sqrt{2}$; f) $1,2\sqrt{10}$.

5) Scoateţi factori de sub radical, apoi efectuaţi adunările :

a) $\sqrt{200} + \sqrt{288} + \sqrt{128}$; b) $\sqrt{125} - \sqrt{720} + \sqrt{180}$; **c)** $\sqrt{108} - \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75} + \sqrt{300}$; **d)** $\sqrt{176} - \sqrt{275} + \sqrt{396}$.

6) Efectuaţi împărţirile :

a) $\sqrt{45} : \sqrt{5}$; b) $\sqrt{27} : \sqrt{75}$; c) $\sqrt{\frac{a^2}{b}} : \sqrt{\frac{a}{b^2}}$; d) $\sqrt{ab} : \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr $a \geq 0$ este anevoioasă. De aceea se obişnuieşte să se utilizeze tabele. La sfîrşitul manualului este prezentat tabelul ce conţine rădăcinile pătrate ale numerelor naturale mai mici decît 100.

Cum calculăm $\sqrt{0,2}$ folosind tabelul ? Să scriem $0,2 = \frac{20}{100}$;

deci $\sqrt{0,2} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{100}} = \frac{4,4721\ ...}{10} = 0,4472...$.

La fel, $\sqrt{0,84} = \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{100}} = \frac{9,1651\ ...}{10} = 0,9165...$.

Extragerea rădăcinii cubice dintr-un număr este şi mai anevoioasă decît extragerea rădăcinii pătrate. La sfîrşitul manualului prezentăm tabelul ce conţine rădăcinile cubice ale numerelor naturale mai mici decît 100.

Întîlnim uneori în calcule numere de forma $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $\frac{2}{\sqrt{2}}$.

$\frac{1}{\sqrt{7} + 2\sqrt{2}}$ · Cum operăm cu aceste numere ?

De exemplu :

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2+5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3} \text{ (ceea ce înseamnă } 7 \cdot \sqrt{3}\text{)};$$

$$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 1 = 2 - \sqrt{2};$$

$$(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{6};$$

$$(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(4\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{5} +$$
$$+ 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 20 + \sqrt{15} + 8\sqrt{15} + 6 = 26 + 9\sqrt{15};$$

$\sqrt{3} : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$; spunem că am raționalizat numitorul ;

$$\sqrt{3} : (\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{1} = \sqrt{6} + \sqrt{3}.$$

La fel ca mai înainte, am raționalizat numitorul, de data aceasta prin amplificare cu $\sqrt{2} + 1$.

Să reamintim felul în care putem obține, mai simplu, scrierea zecimală a unor numere.

De exemplu, fie numărul $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Nu putem obține ușor scrierea zecimală a sa efectuînd împărțirea 2 : 2,23606... . De aceea amplificăm fracția cu $\sqrt{5}$, pentru a obține numitorul rațional ; obținem : $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5} =$ $= 0{,}4 \cdot 2{,}23606... = 0{,}89442...$.

Alt exemplu. Fie numărul scris sub formă de fracție $\frac{3}{\sqrt{3} - 1}$. Vom amplifica fracția cu $\sqrt{3} + 1$; în acest fel numitorul devine număr rațional : $(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$. Deci :

$$\frac{3}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + 1) = 1{,}5 \cdot (1{,}732... + 1) = 4{,}098... .$$

Alt exemplu. Vom amplifica pe $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ cu $\sqrt{5}-\sqrt{3}$, pentru a raționaliza numitorul:

$$\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\frac{4(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=$$

$$=2(\sqrt{5}-\sqrt{3})=1{,}008\ldots .$$

EXERCIȚIU REZOLVAT

Arătați că $\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}=2$.

Într-adevăr,

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\sqrt{3^2-5}=\sqrt{4}=2.$$

EXERCIȚII

1) Efectuați înmulțirile:

a) $\sqrt{216}\cdot\sqrt{50}$; **b)** $\sqrt{48}\cdot\sqrt{18}$; **c)** $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{ab}$; **d)** $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$;

e) $\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$; **f)** $(5-2\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})$; **g)** $\sqrt{6-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{11}}$.

2) Raționalizați numitorul:

a) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$; b) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; c) $\frac{3\sqrt{8}-4\sqrt{20}}{\sqrt{6}}$; d) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; e) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; f) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$;

g) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; h) $\frac{4}{7-\sqrt{2}}$; i) $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$; j) $\frac{7}{\sqrt{20}-4}$; k) $\frac{8}{\sqrt{17}+3}$; l) $\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$.

3) Efectuați împărțirile:

a) $\sqrt{75}:\sqrt{12}$; b) $2\sqrt{8}:3\sqrt{3}$; c) $\sqrt{54}:\sqrt{6}$; d) $\sqrt{27a}:\sqrt{\frac{3}{a}}$ $(a\neq 0)$.

4) Aproximați (cu eroare de cel mult 0,01) numerele:

a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; **b)** $\frac{12}{\sqrt{10}}$; c) $\frac{4}{\sqrt{2}-1}$; d) $\frac{2}{1-\sqrt{3}}$; e) $\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Rădăcina cubică a numărului a este acel număr u ce are proprietatea că $u^3=a$. Acest număr se notează $\sqrt[3]{a}$. Astfel:

$$(\sqrt[3]{a})^3=a.$$

Numărul u ce are proprietatea că $u^3=a$ este *unic*. Într-adevăr, să presupunem prin absurd că ar mai exista un număr v, diferit de u, astfel încît $v^3=a$.

Atunci $u^3-v^3=0$, ceea ce putem scrie și $(u-v)(u^2+uv+v^2)=0$ (verificați !).

Împărţind cu $u - v$ (care este diferit de zero) obţinem $u^2 + uv + v^2 = 0$ sau $\left(u + \frac{1}{2} v\right)^2 + \frac{3}{4} v^2 = 0.$

Avem o sumă de numere pozitive egală cu 0. Deci $u + \frac{1}{2} v = 0$ şi $v = 0$. Aşadar obţinem $u = v = 0$, ceea ce contrazice presupunerea făcută : $u \neq v$.

Contradicţia obţinută ne arată că presupunerea pe care am făcut-o este falsă.

Teoremă. *Dacă a, b sînt două numere reale, atunci :*

1) $\sqrt[3]{a^3} = a$;

2) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$;

3) $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a : b}$ $(b \neq 0)$.

Demonstrație. Proprietatea 1) rezultă direct din definiţia rădăcinii cubice. Fie $u = \sqrt[3]{a}$ şi $v = \sqrt[3]{b}$; atunci $u^3 = a$ şi $v^3 = b$. Să înmulţim membru cu membru aceste două egalităţi ; obţinem : $u^3 \cdot v^3 = a \cdot b$, sau $(u \cdot v)^3 = a \cdot b$.

Aceasta înseamnă că $u \cdot v = \sqrt[3]{a \cdot b}$, adică $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$.

Proprietatea 3) se mai scrie şi astfel :

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Încercaţi să o stabiliţi !

Să observăm că $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2^3} = 2$, şi în general :

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a, \text{ pentru orice număr } a.$$

EXERCIŢII

1) Completaţi tabelul :

x	-27	$-\frac{125}{8}$	$-\frac{125}{27}$	$-\frac{27}{8}$	-1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	$\frac{125}{27}$	$\frac{125}{8}$
$\sqrt[3]{x}$											

2) Scoateţi factori de sub radical :

a) $\sqrt[3]{81}$; b) $\sqrt[3]{32}$; c) $\sqrt[3]{54}$; d) $\sqrt[3]{4000}$; e) $\sqrt[3]{0{,}008^{-2}}$; f) $\sqrt[3]{8a^2}$; g) $\sqrt[3]{a^6}$; h) $\sqrt[3]{a^6 b^2}$; i) $\sqrt[3]{81a^3 b}$; j) $\sqrt[3]{125a^3 b^2}$; k) $\sqrt[3]{16a^4 b^6}$; l) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^2}$; m) $\sqrt[3]{\frac{(a-b)^3}{(a+b)^2}}$.

3) Introduceţi sub radical :

a) $3\sqrt[3]{2}$; b) $2\sqrt[3]{3}$; c) $2\sqrt[3]{0{,}5}$; d) $5\sqrt[3]{4}$; e) $a\sqrt[3]{ab}$; f) $(a-b)\sqrt[3]{\frac{a^2+ab+b^2}{a-b}}$.

4) Efectuaţi :

a) $5\sqrt[3]{24} + 6\sqrt[3]{81}$; b) $2\sqrt[3]{375} - 5\sqrt[3]{192}$; c) $5\sqrt[3]{3a} + \sqrt[3]{24a} - 2\sqrt[3]{192a}$;

d) $\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{128} + 2\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2\,000}$.

5) Efectuați :

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{200}$; b) $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{16}$; c) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; d) $\sqrt[3]{108} : \sqrt[3]{4}$; [e)] $2 : \sqrt[3]{2}$; [f)] $1 : \sqrt[3]{0,027}$;

Fie numărul $\frac{6}{\sqrt[3]{4}}$; amplificînd cu $\sqrt[3]{2}$, raționalizăm numitorul ; obținem

$$\frac{6\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{2} = 3\sqrt[3]{2}\text{; deci } \frac{6}{\sqrt[3]{4}} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Să observăm că $(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4} + \underline{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}} + \underline{\underline{\sqrt[3]{2}\cdot 1}} -$ $- \underline{1\cdot\sqrt[3]{4}} - \underline{\underline{1\cdot\sqrt[3]{2}}} - 1 = 2 - 1 = 1$. Așadar, pentru a raționaliza numitorul fracției $\frac{3}{\sqrt[3]{2} - 1}$, amplificăm cu $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$; obținem ca rezultat $3(\sqrt[3]{4} +$ $+ \sqrt[3]{2} + 1) = 3(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)$.

EXERCIȚII

1) Raționalizați numitorul :

a) $\frac{3}{5\sqrt[3]{2}}$; b) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$; c) $\frac{2}{2 - \sqrt[3]{4}}$; d) $\frac{5}{\sqrt[3]{6} - 1}$; e) $\frac{5}{\sqrt[3]{2} + 1}$.

2) Ordonați crescător numerele :

a) $2\sqrt{7}$, 5, $3\sqrt{3}$ și $\sqrt[3]{120}$; b) 9, $3\sqrt{8}$, $\sqrt{74}$ și $3\sqrt[3]{30}$.

[3)] Fie $a = 2\sqrt{4 - \sqrt{15}}$ și $b = \sqrt{6} - \sqrt{10}$. Determinați semnul fiecărui număr. Calculați apoi pătratele a^2, b^2. Ce observați ?

[4)] Rezolvați sistemele de ecuații :

a) $\begin{cases} x + \sqrt{2}\,y = 2\sqrt{2} \\ \frac{3}{\sqrt{2}}\,x - 2y = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - \sqrt[3]{2}\,y = \sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}y = 0 \end{cases}$

LUCRĂRI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ

LUCRAREA I

1) Calculați : a) $(2\cdot 3)^3$; b) $(-3)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$; c) $(-1)^k \cdot (-1)^{k+1}$ pentru $k = 8, 9$ și 10;

d) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; e) $(3^3 \cdot 3^{-2} + 4^4 \cdot 4^{-3} + 1) \cdot 2^{-3}$.

2) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor :

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0,125$; b) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 0,0625$; c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3$; d) $2 \in [2; 3)$; e) $3 \in [2; 3)$.

3) Calculaţi :

a) $0,12 \cdot 10^4 + 0,12 \cdot 10^3$; b) $0,71 \cdot 10^{-4} + 0,3 \cdot 10^{-3}$; c) $(0,62 \cdot 10^2) \cdot (0,155 \cdot 10^2)$. Scrieţi rezultatele în formă standard.

4) Calculaţi : a) $\sqrt{8} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{32})$; b) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{250} \cdot \sqrt{25\,000}$; c) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{25}$.

5) Raţionalizaţi numitorii : a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; b) $\frac{1}{-\sqrt{7}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$; d) $\frac{1}{1-\sqrt{5}}$; e) $\frac{3}{\sqrt{5}+2}$

LUCRAREA A II-A

1) Care dintre numerele —8, 7, 8 şi 9 este soluţie a ecuaţiei $\frac{x^2+63}{16x} = 1$?

2) Rezolvaţi ecuaţiile : a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 3$; b) $5(x-1) = 4(3-x) + 7$.

3) Rezolvaţi sistemele de ecuaţii :

a) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} + x = 6 \\ \frac{x-y}{8} - y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - y = \frac{1}{6} \\ 8x - 6y = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 3x - y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = -1 \end{cases}$

4) Un muncitor cheltuieşte 952 lei pentru a-şi cumpăra un costum, o cămaşă şi o cravată. Cămaşa este cu 38 lei mai scumpă decît cravata, iar costumul este de 9 ori mai scump decît cămaşa. Aflaţi preţul costumului, al cămăşii şi al cravatei.

CAPITOLUL II

FUNCŢII

1. NOŢIUNEA DE FUNCŢIE

Să notăm cu litera A intervalul închis $[0; 1]$, iar cu litera B intervalul închis $[0; 2]$. Putem stabili o legătură între aceste intervale ; anume, fiecărui element x din A îi putem face să-i corespundă dublul său $2x$, care este un element din mulţimea B. Am definit astfel o funcţie pe mulţimea A, cu valori în mulţimea B. O notăm astfel $f: A \to B$; această funcţie este descrisă (dată) de formula $f(x) = 2x$.

În general, să ne imaginăm că am făcut să corespundă fiecărui element x dintr-o mulţime A un (singur) element y dintr-o mulţime B; spunem că am definit o **funcţie** de la A la B.

Folosim notaţia $f: A \to B$, citind „funcţia f, definită pe mulţimea A, cu valori în mulţimea B". Mulţimea A se numeşte **domeniul de definiţie** al funcţiei f, iar mulţimea B se numeşte **codomeniul** (sau **domeniul de valori** al) funcţiei f.

In exemplul de mai sus am folosit litera x pentru a nota un element oarecare din domeniul de definiţie ; orice literă folosită în acest scop poartă numele de **argument**.

Exemplu. Perimetrul unui dreptunghi este de 12 cm. Ce putem spune despre aria sa ?

Să notăm cu b (cm) lungimea bazei dreptunghiului. Deoarece semiperimetrul este de 6 cm, înălţimea dreptunghiului va fi de $6 - b$ (cm). Aria a (în cm^2) a dreptunghiului este dată deci de :

$$a = b \cdot (6 - b).$$

Putem spune că această formulă ne dă aria dreptunghiului în funcţie de lungimea bazei sale. Să precizăm această funcţie.

Numărul a, reprezentînd o arie, nu poate fi negativ ; putem considera că $a \in [0; +\infty)$. Deoarece b şi $6 - b$ reprezintă lungimi, trebuie să avem $b \geq 0$ şi $6 - b \geq 0$; astfel $b \in [0; 6]$.

Deci dependenţa ariei de lungimea bazei dreptunghiului este exprimată prin funcţia

$$f: [0; 6] \to [0; +\infty),$$

descrisă de $f(b) = b(6 - b)$.

Aici argumentul este litera b. Care este domeniul de definiţie al funcţiei ? Dar codomeniul ?

Să reprezentăm grafic această funcţie, prin puncte. Completăm mai întîi un tabel de valori :

b	0	1	2	3	4	5	6
$f(b)$	0	5	8	9	8	5	0

Înzestrăm planul cu un sistem de axe de coordonate (vezi figura 1). Scoatem în evidenţă punctele ce au abscisa b şi ordonata $f(b)$, trecute în tabel. Le unim printr-o linie „continuă". Graficul obtinut este o linie curbă.

Observăm, privind acest grafic, că numărul a poate lua valori doar în intervalul [0; 9]. Deci dependenţa ariei de lungimea bazei dreptunghiului poate fi exprimată şi prin funcţia :

$$g : [0; 6] \to [0; 9],\ g(b) = b(6 - b).$$

Observaţie. Funcţia g diferă de funcţia f, căci are alt codomeniu !

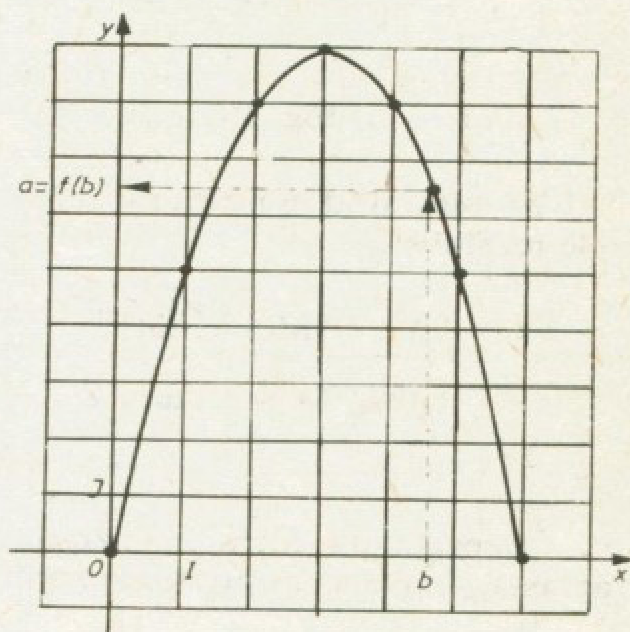


Fig. II.1

Alte exemple. 1) *Procese de creştere şi de descreştere.* O celulă de bacterie se divide, dînd naştere la două celule ; după o oră, fiecare dintre acestea se divide, apărînd astfel patru celule ; după încă o oră, fiecare dintre cele 4 celule se divide, apărînd opt celule şi aşa mai departe. Putem completa un tabel :

Momentul t	0	1	2	3	4	...
Numărul total de bacterii	1	2	4	8	16	...

Să observăm că numărul total de bacterii, n, depinde de momentul în care le numărăm. Acest fenomen *de creştere* este exprimat prin funcţia $n : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, descrisă de $n(t) = 2^t$ (verificaţi !). Graficul acestei funcţii este o mulţime de puncte din plan ; cîteva sînt desenate în figura 2.

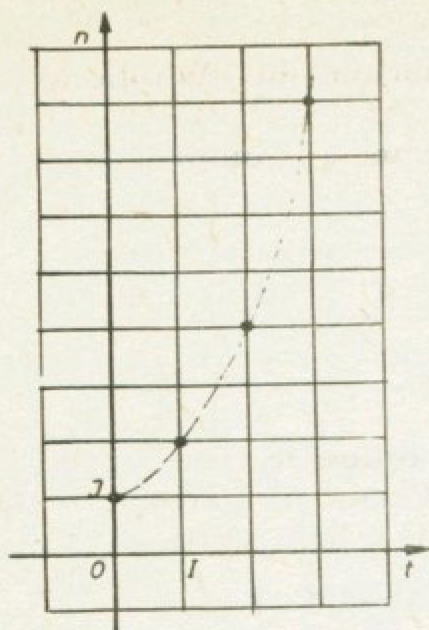


Fig. II.2

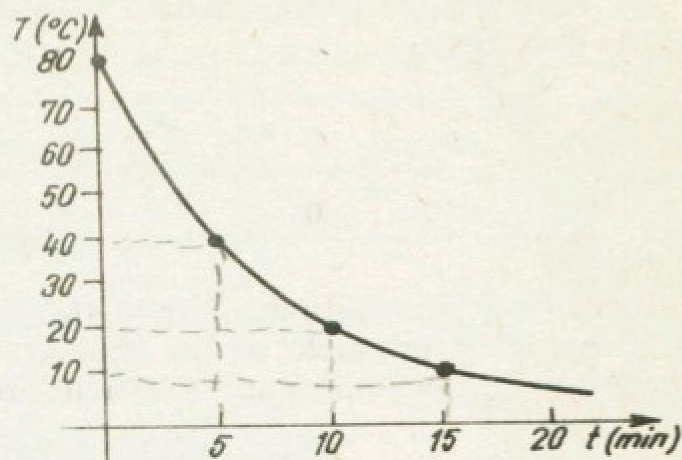


Fig. II.3

b) Măsurînd temperatura T a ceaiului dintr-o cană, s-au obţinut următoarele rezultate :

Momentul t	0	5	10	15
Temperatura T (în °C)	80	40	20	10

Dependenţa între temperatura ceaiului şi momentul în care s-a măsurat această temperatură poate fi exprimată prin funcţia :

$$T : [0; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$$

descrisă de $T(t) = 80 \cdot 2^{-t/5}$ (verificaţi !).

Graficul acestei funcţii a fost trasat în figura 3 printr-o linie „continuă", ce trece prin punctele ce corespund măsurătorilor.

2) Elevii unei clase au obţinut la teză următoarele rezultate : două note de 4, patru note de 5, trei note de 6, cinci note de 7, opt note de 8, şase note de 9 şi patru note de 10. Construim funcţia

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \rightarrow \mathbf{N}$$

care face să corespundă fiecărei note *frecvenţa* ei (numărul care arată de cîte ori a fost obţinută nota). Funcţia este descrisă de tabelul :

Nota x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecvenţa ei $f(x)$	0	0	0	2	4	3	5	8	6	4

Graficul acestei funcţii este alcătuit din punctele $I(1;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(3;\ 0)$, $C(4;\ 2)$, $D(5;\ 4)$, $E(6;\ 3)$, $F(7;\ 5)$, $G(8;\ 8)$, $H(9;\ 6)$, şi $K(10;\ 4)$ (vezi figura 4).

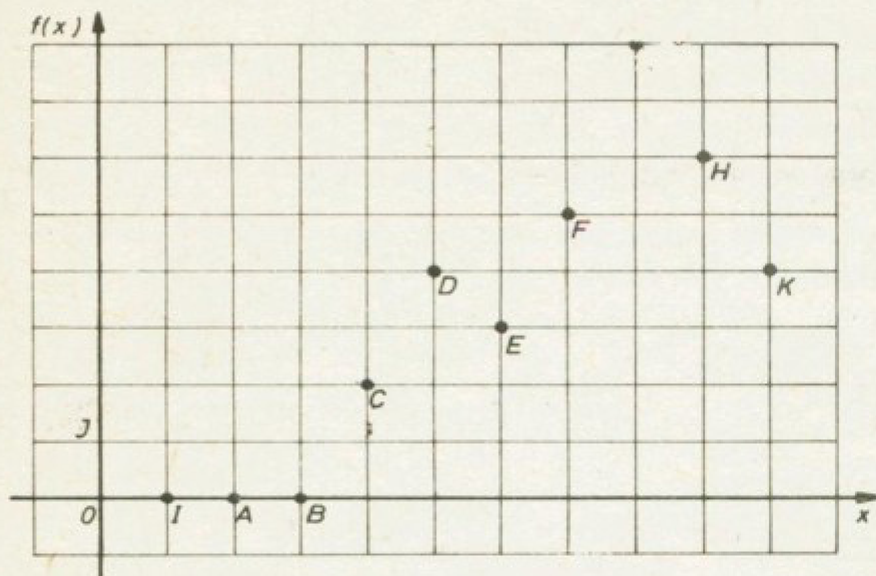
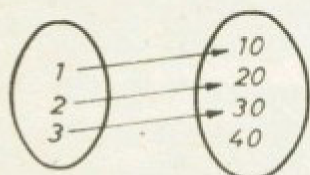


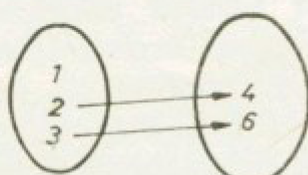
Fig. II.4

EXERCIŢII

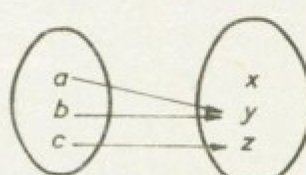
1) (oral) Care dintre diagramele următoare nu definesc funcţii ? De ce ?



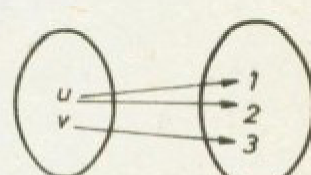
a



b



c



d

2) Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ şi fie funcţia $f : A \to A$ dată prin formula $f(x) = 6 - x$. Alcătuiţi tabelul de valori al funcţiei.

3) Fie funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ descrisă astfel :

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ dacă } x \leq 2; \\ x - 2 \text{ dacă } x > 2. \end{cases}$$

Calculaţi $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(1{,}5)$, $g(2)$, $g(2{,}5)$, $g(3)$, $g(4)$.

4) Un pieton pleacă la ora 8 din localitatea A şi ajunge la ora 12 în localitatea B (în aceeaşi zi), mergînd cu viteza (constantă) de 5 km/h. Considerăm funcţia $d : [8;\ 12] \to \mathbf{R}$, care face ca fiecărei valori a timpului t din intervalul $[8;\ 12]$ să-i corespundă distanţa $d(t)$ parcursă de la ora 8 pînă la momentul t (t este exprimat în ore, iar $d(t)$ în kilometri). Scrieţi formula care descrie pe d şi completaţi tabelul :

t	8	8,5	9	10	10,5	11	12
$d(t)$	0						

Aţi putea completa tabelul şi cu alte valori ? Aţi putea alcătui un tabel care să descrie complet funcţia ?

5) Un paraşutist se aruncă dintr-un avion şi îşi deschide paraşuta la t secunde după momentul saltului. Tabelul de mai jos ne dă distanţa parcursă în cădere liberă, în metri :

t	1	2	3	4
distanţa d	4,9	19,6	44,1	78,4

Puteţi descrie dependenţa între d şi t printr-o funcţie ? (Indicaţie : comparaţi prin împărţire valorile lui d cu pătratele lui t.)

6) Reprezentaţi grafic funcţiile :

a) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x$;

b) $g : \{-2, -1, 1, 2\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.

7) Care dintre graficele funcţiilor :

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x^5 - 7x^3 - 4x$; b) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; c) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = x + 1$,

conţine originea axelor ?

8) Pentru ce valoare a lui m, graficul funcţiei

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = 2x - m,$$

conţine punctul $A(1; -5)$?

2. FUNCŢII LINIARE

O funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = mx + n$, unde m şi n sînt numere reale date, se numeşte **funcţie liniară.** Graficul oricărei funcţii liniare este o dreaptă în plan. Cunoaştem de asemenea că, dacă $m > 0$, atunci funcţia este **crescătoare** (ceea ce înseamnă că dacă $a < b$, atunci $f(a) < f(b)$); dacă $m < 0$ funcţia este **descrescătoare** (ceea ce înseamnă că dacă $a < b$, atunci $f(a) > f(b)$). Dacă $m = 0$ funcţia este **constantă ;** graficul ei este o dreaptă paralelă cu axa Ox.

Pentru reprezentarea grafică a unei funcţii liniare este suficient să cunoaştem doar două puncte ale graficului.

Exemple. 1) Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de $f(x) = 2x - 4$. Ea este o funcţie liniară ; aici $m = 2$ şi $n = -4$. Avem $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 4 = -6$ şi $f(1) = -2$; deci punctele $A(-1; -6)$ şi $B(1; -2)$ aparţin graficului. Graficul funcţiei va fi dreapta AB (vezi figura 5). Dacă $M(x; y)$ este un punct al dreptei AB, atunci

coordonatele sale x şi y verifică relaţia $y - 2x + 4 = 0$. În afară de punctele dreptei AB nu există altele care să verifice această relaţie. Spunem că AB este **dreapta de ecuaţie** $y - 2x + 4 = 0$.

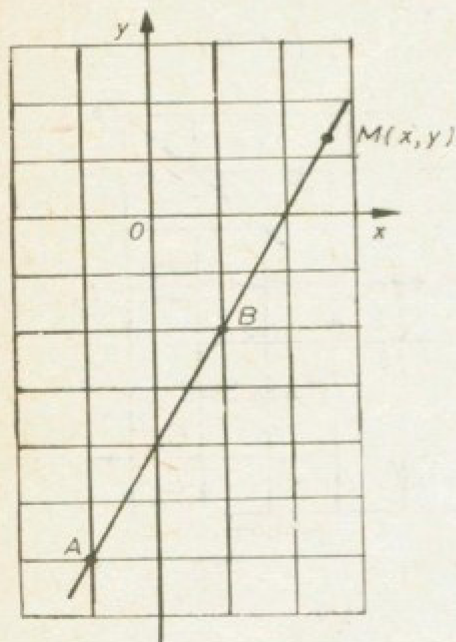


Fig. II.5

Adesea, pentru a reprezenta grafic o funcţie liniară, determinăm punctele în care graficul intersectează axele de coordonate. Pentru aceasta, ţinem seamă de faptul că **axa** Ox **are ecuaţia** $y = 0$, **iar axa** Oy **are ecuaţia** $x = 0$. Pentru funcţia din acest exemplu, găsim intersecţia graficului cu axa Ox rezolvînd sistemul :

$$\begin{cases} y - 2x + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$; obţinem soluţia $(2; 0)$.

Intersecţia cu axa Oy este dată de soluţia sistemului:

$$\begin{cases} y - 2x + 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$, adică de $(0; -4)$.

Deci dreapta se obţine unind punctele $C(2; 0)$ şi $D(0; -4)$ (vezi figura 6).

2) Să reprezentăm grafic funcţia $f : [1; 4] \to \mathbf{R}$ descrisă de $f(x) = x + 1$. Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţia liniară descrisă de $g(x) = x + 1$. Graficul funcţiei g este dreapta determinată de punctele $(-1; 0)$ şi $(0; 1)$. Am reprezentat această dreaptă în figura 7 (cu linie întreruptă). Graficul funcţiei f va fi o parte a acestei drepte, anume aceea formată din punctele $(x; y)$ care au abscisa x cuprinsă între 1 şi 4. Deci f are ca grafic segmentul ce uneşte punctele $A(1; 2)$ şi $B(4; 5)$. Punctele A şi B aparţin graficului funcţiei f.

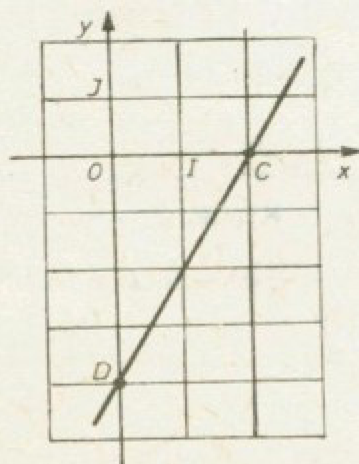


Fig. II.6

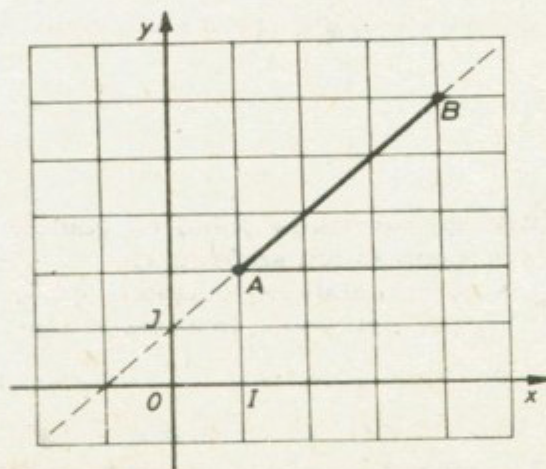


Fig II.7

3) Funcţia $h : (1; 4) \to \mathbf{R}$, $h(x) = x + 1$ are graficul desenat în figura 8. Punctele A şi B nu aparţin graficului.

4) Funcţia $k : (1; +\infty) \to \mathbf{R}$, $k(x) = x + 1$ are ca grafic semidreapta cu originea în A reprezentată în figura 9. Punctul A nu aparţine graficului.

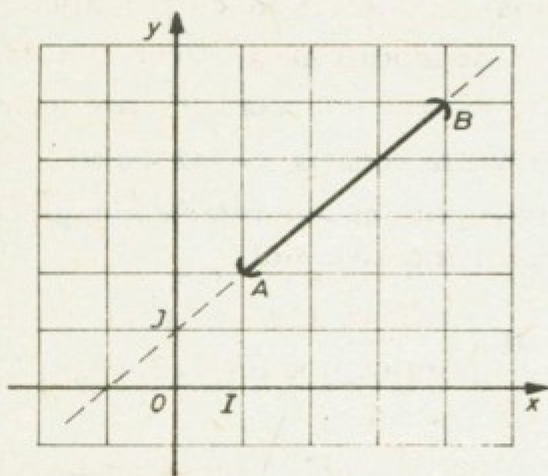


Fig. II.8

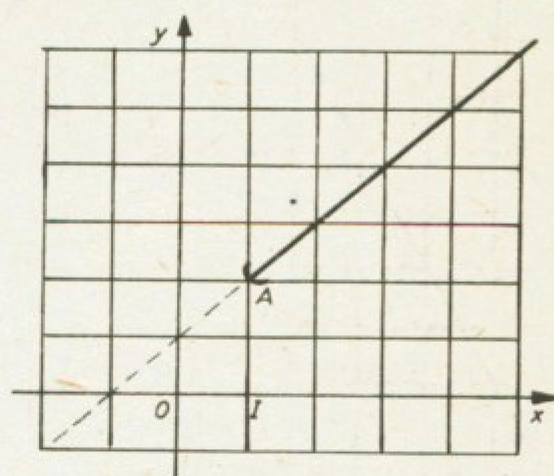


Fig. II.9

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să aflăm funcţia liniară f pentru care $f(1) = 3$ şi $f(2) = 5$ (deci al cărei grafic conţine punctele $A(1; 3)$ şi $B(2; 5)$).

Funcţia f fiind liniară, este descrisă de $f(x) = mx + n$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Rămîne să aflăm valorile lui m şi n.

Avem $f(1) = m \cdot 1 + n = m + n$, iar $f(2) = m \cdot 2 + n = 2m + n$. Deci pentru a afla valorile lui m şi n, va trebui să rezolvăm sistemul :

$$\begin{cases} \mathbf{m} + \mathbf{n} = 3, \\ 2\mathbf{m} + \mathbf{n} = 5. \end{cases}$$

Rezolvîndu-l, găsim $m = 2$, $n = 1$. Funcţia liniară căutată este descrisă de formula $f(x) = 2x + 1$.

EXERCIŢII

1. Aflaţi numărul a ştiind că graficul funcţiei constante $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a$, conţine punctul $M(-3; -5)$. Reprezentaţi grafic funcţia.

2. Construiţi graficele funcţiilor : $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 3$ şi $h : [-2; 2] \to \mathbf{R}$, $h(x) = 3$.

3. Reprezentaţi grafic, în acelaşi sistem de coordonate, funcţiile :

$$f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{ descrise de :}$$

$f(x) = -x$, $g(x) = -x + 2$, $h(x) = -x - 2$. Ce observaţi ?

4. Comparaţi între ele graficele funcţiilor :

$$f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_1(x) = -2x + 2 ;$$

$$f_2 : [0; 3] \to \mathbf{R}, f_2(x) = -2x + 2 ;$$

$$f_3 : (0; 3) \to \mathbf{R},\ f_3(x) = -2x + 2\ ;$$
$$f_4 : \{0; 3\} \to \mathbf{R},\ f_4(x) = -2x + 2\ .$$

5) Reprezentați grafic funcțiile :

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 2 \text{ dacă } x < 0, \\ -1 \text{ dacă } x \geq 0; \end{cases}$

b) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = \begin{cases} -x \text{ dacă } x \leq 0, \\ 0 \text{ dacă } 0 < x < 2, \\ x - 2 \text{ dacă } x \geq 2. \end{cases}$

6) Reprezentați grafic funcțiile :

$f: (2; +\infty) \to \mathbf{R},\ f(z) = 5 - z$ și $g : (-\infty; -2) \to \mathbf{R},\ g(z) = 5 - z.$

7) Pentru ce valori ale lui m funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată de $f(x) = (m - 2)x + m$ este :

a) crescătoare ; b) descrescătoare ; c) constantă ?

8) a) Determinați funcția liniară f pentru care $f(1) = 10,\ f(2) = -4.$

b) Determinați funcția liniară g pentru care $g(0) = 2,\ g(1) = 4,\ g(2) = 6$ și $g(3) = 8.$

c) Există o funcție liniară h astfel încît $h(-1) = -3,\ h(0) = 2,\ h(1) = 1$?

d) Reprezentați grafic funcțiile f și g.

9) Să presupunem că, pe măsură ce coborîm spre centrul Pămîntului, la fiecare 30,5 metri temperatura crește cu 1°C; iar la suprafață temperatura este de 20°C.

a) Stabiliți o formulă care să descrie dependența temperaturii de adîncime.

b) Ce temperatură va fi la adîncimea de 122 m ?

c) La ce adîncime temperatura va fi de 36°C ?

10) Reprezentați grafic funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ descrisă de :

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ dacă } x \geq 2, \\ -x + 2 \text{ dacă } x < 2. \end{cases}$$

3. FUNCȚII PĂTRATICE

Ne propunem să studiem funcția care face să corespundă fiecărui număr real pătratul său :

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2.$$

Să completăm mai întîi un tabel de valori :

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

Valorile funcției trecute în tabel ne îndeamnă să presupunem că funcția este descrescătoare pe intervalul $(-\infty; 0]$ și crescătoare pe $[0; +\infty)$.

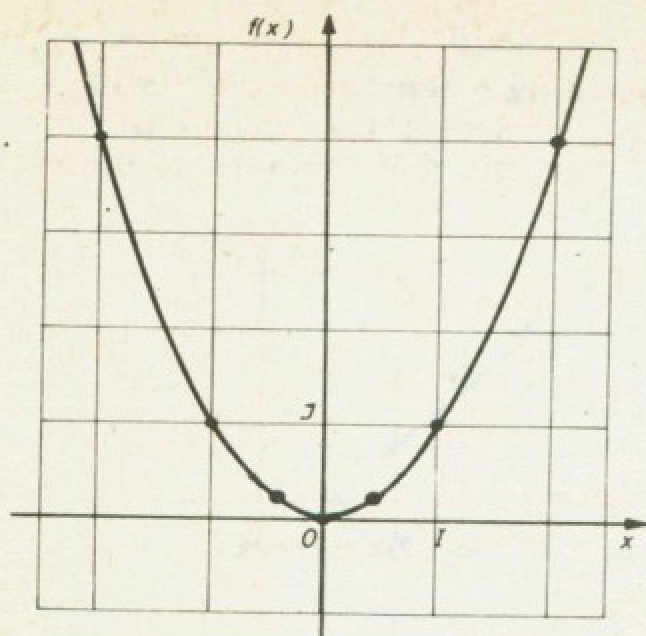


Fig. II.10

În figura 10 prezentăm graficul acestei funcţii. Am scos în evidenţă punctele ale căror coordonate sînt trecute în tabelul de valori de mai sus. Graficul funcţiei este o *parabolă*.

Vom numi **funcţie pătratică** orice funcţie de forma :

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ g(x) = ax^2 + bx + c ;$$

unde a, b, c sînt numere reale, iar $a \neq 0$.

În particular, funcţia f de mai sus este o funcţie pătratică ($a = 1$, $b = c = 0$).

Graficul oricărei funcţii pătratice este o parabolă.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să determinăm funcţia pătratică g ce are proprietatea că $g(1) = 0$; $g(2) = 1$ şi $g(3) = 4$.

Ştim că $g(x) = ax^2 + bx + c$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Rămîne să determinăm **coeficienţii** a, b şi c. Avem $g(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$; $g(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$; $g(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 3b + c$. Deci coeficienţii îi aflăm rezolvînd sistemul de ecuaţii :

$$\begin{cases} \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0, \\ 4\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c} = 1, \\ 9\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + \mathbf{c} = 4. \end{cases}$$

Înlocuim acest sistem prin altul, echivalent cu el, scăzînd din a doua ecuaţie pe prima, iar din a treia pe a doua :

$$\begin{cases} \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0, \\ 3\mathbf{a} + \mathbf{b} = 1, \\ 5\mathbf{a} + \mathbf{b} = 3. \end{cases}$$

Scăzînd acum din a treia ecuaţie pe a doua, obţinem :

$$\begin{cases} \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0, \\ 3\mathbf{a} + \mathbf{b} = 1, \\ 2\mathbf{a} = 2. \end{cases}$$

Acest ultim sistem se rezolvă uşor ; soluţia sa este $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$. Aşadar funcţia pătratică căutată este $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

EXERCIŢII

1) Completaţi tabelul :

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$											
$f_2(x) = x^2$											
$f_3(x) = 2x^2$											
$f_4(x) = -\frac{1}{2}x^2$											
$f_5(x) = -x^2$											
$f_6(x) = -2x^2$											

Reprezentaţi grafic, în acelaşi sistem de coordonate, funcţiile f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, definite pe $\mathbf{R}$, cu valori reale (luaţi ca unitate de măsură, pe ambele axe, 1 cm).

2) Aceeaşi problemă, pentru funcţiile g_1, g_2, g_3, g_4 şi g_5.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$g_1(x) = x^2$									
$g_2(x) = x^2 + 1$									
$g_3(x) = x^2 + 2$									
$g_4(x) = x^2 - 1$									
$g_5(x) = x^2 - 2$									

Ce observaţi ?

3) Aceeaşi problemă, pentru funcţiile h_1, h_2, h_3, h_4.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$h_1(x) = x^2$								
$h_2(x) = x^2 - x$								
$h_3(x) = x^2 - 2x$								
$h_4(x) = x^2 + x$								

4) Aceeaşi problemă, pentru funcţiile k_1, k_2, k_3, k_4.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$k_1(x) = x^2$									
$k_2(x) = (x-1)^2$									
$k_3(x) = (x-2)^2$									
$k_4(x) = (x+1)^2$									

Ce observaţi ?

5) Determinaţi funcţia pătratică ce are proprietatea că $g(0) = 0$, $g(1) = -2$, $g(2) = 0$.

6) Care funcţie pătratică are graficul o parabolă ce conţine punctele $A(1; 4)$, $B(2; 3)$ şi $C(3; 4)$?

7) Reprezentaţi grafic funcţia ce descrie dependenţa ariei unui pătrat (măsurată în cm^2) de lungimea laturii sale (măsurată în cm). Alegeţi unitatea de măsură de 4 cm pe fiecare axă de coordonate. Completaţi apoi tabelul :

latura l (cm)	1,4	2			10
aria A (cm^2)			8	10	

8*) În figura 11 vedeţi desenată o curbă ce seamănă cu un arc de parabolă. Ea este graficul unei funcţii f. Completaţi tabelul :

x	0,5	1	1,5
$f(x)$			

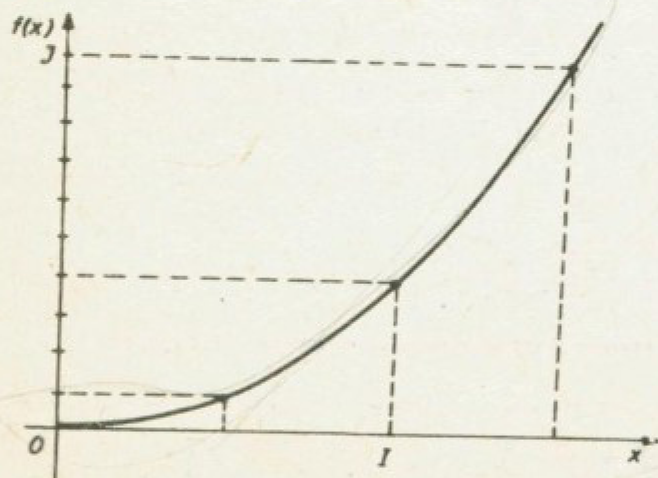


Fig. II.11

Este într-adevăr un arc de parabolă ?

9) Înălţimea h (în kilometri) atinsă de o rachetă la t minute după lansare este dată în tabelul :

durata zborului t	0	1	2	3	4
înălţimea h	0	25	100	225	400

Puteţi descrie mişcarea rachetei printr-o funcţie ? Aflaţi înălţimea atinsă după 10 minute de la lansare, presupunînd că motoarele rachetei funcţionează tot timpul.

4. ALTE FUNCŢII

Orice număr real x, diferit de zero, are un invers, care a fost notat $\frac{1}{x}$ sau x^{-1}. Să considerăm tabelul :

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Putem considera funcţia

$$f : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{1}{x}.$$

Graficul acestei funcţii (vezi figura 12) este o *hiperbolă*.

Fie x un număr real ≥ 0 ; putem extrage rădăcina pătrată din x ; ca rezultat obţinem numărul real $\sqrt{x}$.

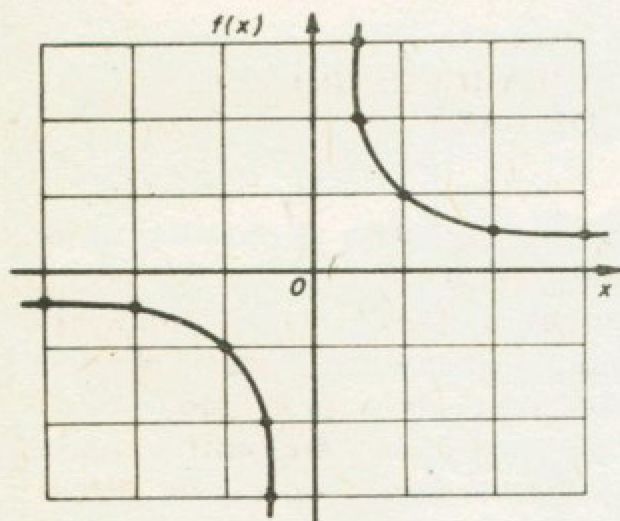


Fig. II.12

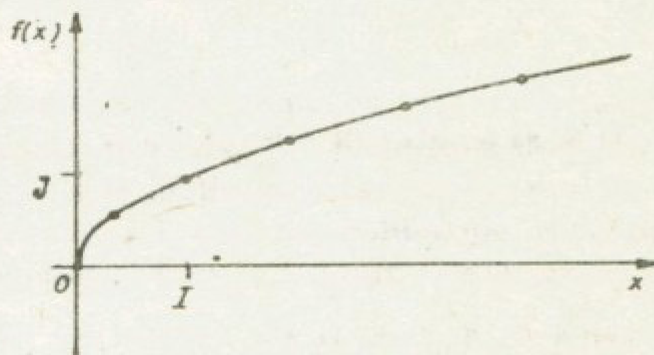


Fig. II.13

Să completăm un tabel (consultaţi şi tabelul de la sfîrşitul manualului) :

x	0	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4
$\sqrt{x}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$	$\sqrt{3} = 1{,}73\ldots$	2

Funcţia $f : [0;\ +\infty) \to \mathbf{R}$ descrisă de $f(x) = \sqrt{x}$ are graficul prezentat în figura 13.

EXERCIŢII

1) Reprezentaţi grafic, completînd mai întîi un tabel de valori, funcţia :

$$f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{2}{x}.$$

2) Un arhitect vrea să proiecteze o cameră dreptunghiulară avînd suprafaţa de 15 m^2. Stabiliţi cum variază lungimea camerei în funcţie de lăţimea ei. Reprezentaţi grafic această dependenţă.

3) Între Bucureşti şi Ploieşti, pe şosea, sînt 60 km. În cît timp parcurge un automobil această distanţă, mergînd cu viteza (constantă) v? Reprezentaţi grafic dependenţa între durata călătoriei şi viteză.

4) Ştim că tensiunea curentului electric din reţea este de 220 V. Făcîndu-l să treacă printr-un rezistor de rezistenţă R (ohmi), intensitatea sa I variază astfel :

$$I(R) = \frac{220}{R}.$$

a) Trasaţi graficul dependenţei lui I faţă de R.

b) Rezistorul este protejat de o siguranţă fuzibilă de 5 A. Care este valoarea minimă a rezistenţei rezistorului, ce nu provoacă întreruperea curentului prin distrugerea siguranţei ?

5) Reprezentaţi grafic funcţia $f : [1; 3] \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{3}{x}$.

LUCRARE PENTRU VERIFICAREA ÎNSUŞIRII UNOR CUNOŞTINŢE DE BAZĂ

1) Se dă funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, descrisă de :

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 \text{ pentru } x \leq 0, \\ 2 - x \text{ pentru } 0 < x \leq 2, \\ -x \text{ pentru } x > 2. \end{cases}$$

Calculaţi $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

2) Reprezentaţi grafic funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

3) Punctul $A(2; 3)$ aparţine graficului funcţiei liniare date de $f(x) = 2x - 7$? Dar punctul $B(2; -3)$?

4) Un kilogram de portocale costă 18 lei. Alcătuiţi graficul funcţiei care exprimă modul în care preţul unei cantităţi de portocale depinde de masa acesteia. Folosind graficul, stabiliţi cît costă 700 g portocale. Cît cîntăreşte o pungă cu portocale care a costat 21,60 lei ?

CAPITOLUL III

POLINOAME ŞI FRACŢII RAŢIONALE

1. POLINOAME. OPERAŢII CU POLINOAME

Am învăţat în clasele a VI-a şi a VII-a să facem calcule cu numere reprezentate prin litere şi în primul rînd cu polinoame.

Să ne reamintim că, de exemplu,

$$X^3Y^2 - 2Y^4 + 3$$

este un **polinom** în nedeterminatele X şi Y, de gradul 5 ;

$$Z^2 + \frac{1}{2}Z + 4$$

este un polinom în nedeterminata Z, de gradul 2. De asemenea, numerele diferite de 0 pot fi considerate polinoame de gradul 0 în orice nedeterminată ; pentru uniformitate, vom considera că numărul 0 este polinom (dar că nu are grad). Numerele reale considerate ca polinoame vor fi numite **polinoame constante.**

Ne vom ocupa în special cu polinoame într-o singură nedeterminată ; aceasta va fi notată de obicei cu litera X.

Am învăţat în clasele anterioare că orice polinom poate fi scris în formă canonică. De asemenea, am învăţat să efectuăm trei operaţii cu polinoame : adunarea, scăderea şi înmulţirea ; să le repetăm prin :

EXERCIŢII

1) Scrieţi în formă canonică polinoamele :

a) $\frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + X^3 + 5$; b) $X + 1 + 2X^2 + 3X^3$; c) $1 - 2X + 4X^3 - 8X^2$; d) $-X^5 - X + X^3 - X^2$.

2) Scrieţi în formă canonică suma polinoamelor :

a) $7X^2 - 3X + 5$ şi $2X^2 + 7$; b) $2X - 5$ şi $4X^2 - 3X + 6$; c) $1 - X + X^2 - X^3 + X^4$ şi $1 + X + X^2 + X^3 + X^4$; d) $X^2 - X + 1$, $X^2 + X + 1$ şi $X^3 - 2X^2 + 1$.

3) Ce polinom trebuie adunat cu $X^3 + 2X - 3$ pentru a obţine ca rezultat $X^4 - X^2 + 1$?

4) Efectuaţi calculele :

a) $(3X^2 - 3X + 5) - (2X^2 - 3X + 4)$; b) $(X^3 + 2X - 6) - (3X^3 - X^2 + 2)$; c) $(5X^2 + 6X + 3) - (X^2 + 2X) + (2X^2 + 5)$.

5) Efectuaţi înmulţirile :

a) $3X^2 \cdot (4X - 1)$; b) $(4X^3 - 5X - 1) \cdot 2X^2$; c) $(X^2 - 7X - 3) \cdot (2X - 1)$; d) $(X^4 + X^3 - 8) \cdot (2X^2 - 3X + 1)$.

2. ÎMPĂRŢIREA POLINOAMELOR

Fie monoamele $6X^5$ şi $2X^3$. Constatăm că :

$$6X^5 = 3X^2 \cdot 2X^3 ;$$

putem scrie astfel :

$$6X^5 : 2X^3 = 3X^2.$$

Observaţi relaţia între gradele monoamelor : $5 - 3 = 2$.

În general, dacă $m \geq n$ şi $b \neq 0$, atunci :

$$aX^m : bX^n = (a : b)X^{m-n}$$

care se mai scrie şi :

$$aX^m : bX^n = \frac{a}{b} X^{m-n}.$$

La fel procedăm şi în cazul unor monoame în mai multe nedeterminate ; de exemplu :

$$12X^3Y^2 : 4XY = (12 : 4)X^{3-1}Y^{2-1} = 3X^2Y,$$
$$(-14XY^3Z) : 2XY^2 = (-14 : 2)X^{1-1}Y^{3-2}Z^{1-0} = -7YZ,$$
$$(-3X^2Y^3) : (-2Y) = ((-3) : (-2))X^{2-0}Y^{3-1} = \frac{3}{2} X^2Y^2 = 1,5X^2Y^2,$$
$$22X^4 : 11 = (22 : 11)X^{4-0} = 2X^4.$$

EXERCIŢII

1) Efectuaţi împărţirile :

a) $8X^4 : (-2X^2)$; b) $(-6X^5) : 4X^3$; c) $(-5X^6) : (-X^2)$; d) $4X^7 : 8X$; e) $25X^2 : 5X$; f) $5X^3 : (-10X)$.

2) Efectuaţi :

a) $(-15X^4Y^2) : (-5X^2Y^2)$; b) $4X^5Y^2 : \left(-\frac{2}{3} X^3Y\right)$; c) $3XY^4 : 2XY$; d) $3X^3Y^2 : 4X^3Y^2$; e) $25X^3Y^3 : 5XY^2$; f) $(-6X^5Y^2) : 3X^2Y$.

Fie polinoamele $P(X) = 2X^2 + 4X$ şi $Q(X) = X + 2$. Constatăm că $P(X) = Q(X) \cdot 2X$; putem spune că polinomul $C(X) = 2X$ este *cîtul* împărţirii polinomului $P(X)$ la $Q(X)$.

Alt exemplu : deoarece

$$X^2 - 4 = (X - 2) \cdot (X + 2),$$

putem spune că polinomul $X + 2$ este cîtul împărțirii polinomului $X^2 - 4$ la polinomul $X - 2$.

Să încercăm să împărțim polinomul $P(X) = 2X^3 + 5X + 1$ la polinomul $Q(X) = X^2 + X$. Cîtul lor ar trebui să aibă gradul $3 - 2 = 1$. Să presupunem că acest cît este polinomul $C(X) = aX + b$; atunci :

$$2X^3 + 5X + 1 = (X^2 + X) \cdot (aX + b),$$

de unde : $2X^3 + 5X + 1 = aX^3 + (a + b)X^2 + bX.$

Identificînd coeficienții, obținem :

$$\begin{aligned} 2 &= a && \text{(coeficienții lui } X^3\text{)},\\ 0 &= a + b && \text{(coeficienții lui } X^2\text{)},\\ 5 &= b && \text{(coeficienții lui } X\text{)},\\ 1 &= 0 && \text{(termenii liberi)}, \end{aligned}$$

ceea ce este absurd.

Presupunerea făcută ne-a condus la o concluzie absurdă ; ea este deci falsă. Nu putem împărți „fără rest" polinomul $2X^3 + 5X + 1$ la $X^2 + X$.

Să observăm însă că :

$$2X^3 + 5X + 1 = (X^2 + X) \cdot (2X - 2) + 7X + 1 ;$$

astfel putem spune că prin împărțirea lui $2X^3 + 5X + 1$ la $X^2 + X$ am obținut *cîtul* $2X - 2$ și *restul* $7X + 1$.

Să observăm că gradul restului este 1, mai mic decît gradul împărțitorului $X^2 + X$, care este 2.

Practic, procedăm astfel :

— împărțim monomul $2X^3$ la monomul X^2 și obținem $2X$;

— înmulțim pe $2X$ cu $X^2 + X$ și obținem produsul parțial $2X^3 + 2X^2$ pe care-l scădem din deîmpărțit ;

— deîmpărțitul se înlocuiește cu $-2X^2 + 5X + 1$; împărțim monomul $-2X^2$ la monomul X^2, obținînd -2 ;

— înmulțim pe -2 cu $X^2 + X$ și obținem produsul parțial $-2X^2 - 2X$, pe care-l scădem din $-2X^2 + 5X$;

— deîmpărțitul se înlocuiește cu $7X + 1$; deoarece monomul $7X$ nu mai poate fi împărțit la monomul X^2, împărțirea s-a terminat. Cîtul este $2X - 2$, iar restul este $7X + 1$.

$$\begin{array}{rrrr|l} & 2X^3 & & +\,5X + 1 & X^2 + X \\ \cline{5-5} (-) & \underline{+\,2X^3} & \underline{+\,2X^2} & & 2X - 2 \\ & & -2X^2 & +\,5X + 1 & \text{cîtul} \\ & (-) & \underline{-2X^2} & \underline{-\,2X} & \\ & & & 7X + 1 & \text{restul} \end{array}$$

Se obişnuieşte să se schimbe semnul fiecărui produs parţial, efectuîndu-se adunări în loc de scăderi ; calculele se aranjează astfel :

$$\begin{array}{rrrr|l}
2X^3 & & +5X & +1 & X^2+X \\ \cline{5-5}
-2X^3 & -2X^2 & & & 2X-2 \\ \cline{1-2}
& -2X^2 & +5X & & \\
& 2X^2 & +2X & & \\ \cline{2-3}
& & 7X & +1 &
\end{array}$$

Urmăriţi etapă cu etapă, împărţirea polinomului $81X^4 - 10X^2 + 35X + 1$ la polinomul $9X^2 + X + 4$:

$$\begin{array}{rrrrrl|l}
81X^4 & & -10X^2 & +35X & +1 & & 9X^2+X+4 \\ \cline{7-7}
-81X^4 & -9X^3 & -36X^2 & & & & 9X^2-X-5. \\ \cline{1-3}
& -9X^3 & -46X^2 & +35X & & & \\
& 9X^3 & +X^2 & +4X & & & \\ \cline{2-4}
& & -45X^2 & +39X & +1 & & \\
& & 45X^2 & +5X & +20 & & \\ \cline{3-5}
& & & 44X & +21 & &
\end{array}$$

Deci cîtul împărţirii este $9X^2 - X - 5$, iar restul $44X + 21$.

În general, se poate demonstra o *teoremă a împărţirii cu rest* pentru polinoame. Aceasta se enunţă astfel :

TEOREMĂ. Fie polinoamele $P(X)$ de gradul p şi $Q(X)$ de gradul q, cu coeficienţi numere reale.

Există un polinom $C(X)$ şi un polinom $R(X)$ astfel încît

$$P(X) = Q(X) \cdot C(X) + R(X)$$

şi astfel încît gradul polinomului $R(X)$ să fie mai mic decît q. Polinoamele $C(X)$ şi $R(X)$ cu aceste proprietăţi sînt unice.

Observaţie. Înainte de efectuarea împărţirii, atît deîmpărţitul cît şi împărţitorul trebuie scrişi în formă canonică.

EXERCIŢII

1) Efectuaţi împărţirile :

a) $(3X^3 - 6X^2 + 2X) : 3X$; b) $(6X^5 - 5X^4 + 4X^3) : (-2X^2)$.

2) Efectuaţi împărţirile :

a) $(X^2 - 5) : (X - 2)$; b) $(3X^2 + 20) : (X - 3)$; c) $(3X^2 - 27) : (X - 3)$; **d)** $(8X^3 - 2) : (2X - 1)$; **e)** $(25 - 30X + 9X^2) : (3X - 5)$; **f)** $(X^3 - 6X^2 + 11X - 10) : (X - 4)$.

3) Efectuaţi împărţirile :

a) $(X^2 + 1) : (X + 1)$; b) $(X^3 + 1) : (X + 1)$; c) $(X^4 + 1) : (X + 1)$; d) $(X^5 + 1) : (X + 1)$; e) $(X^6 + 1) : (X + 1)$; f) $(X^7 + 1) : (X + 1)$. Puteţi spune care va fi cîtul şi restul împărţirii lui $X^{19} + 1$ la $X + 1$?

4) Efectuaţi împărţirile :
a) $(X^3 + 1) : (X + 2)$; b) $(X^6 + 1) : (X^2 + 2)$; c) $(X^9 + 1) : (X^3 + 2)$. Ce observaţi ?

5) Efectuaţi împărţirile : $(X^4 + X^2 + 1) : (X^2 + X + 1)$ şi $(X^4 + X^2 + 1) : (X^2 - X + 1)$. Ce observaţi ?

6) Fie $C(X)$ cîtul împărţirii polinomului $X^3 + X^2 + X + 1$ la $X^2 - X + 2$. Efectuaţi împărţirea polinomului $X^3 + X^2 + X + 1$ la $C(X)$. Este adevărat că obţinem cîtul $X^2 - X + 2$? De ce ?

7) Efectuaţi împărţirile :
a) $(X^5 - 2X^3 + X + 2) : (X^3 - X^2 - X + 1)$; b) $(X^3 + 2 - X - 2X^2) : (4 - 4X + X^2)$; c) $(X^4 - 7X^2 + 6X) : (X^2 - 2)$; d) $(18X^4 - 8X^3 + 4X^2 - 1) : (4X^2 + X - 1)$.

8) Efectuaţi împărţirile polinoamelor în nedeterminata X (scrieţi-le mai întîi în formă canonică) :
a) $(X^4 - Y^4) : (X + Y)$; b) $(15X^2 + 26XY + 8Y^2) : (3X + 4Y)$; c) $(2X^3 + 3X^2Y + 2XY - Y^2) : (X^2 - Y)$; d) $(6X^2 - 2XY - 8Y^2 + 5) : (3X + 5Y + 2)$; e) $(9X^3 - 6X^2Y - 2XY^2 + 4Y^3) : (3X + 2Y)$.

9) Aflaţi restul împărţirii polinomului $X^2 - 6XY + 9Y^2$ la polinomul $X^2 - 9Y^2$, considerîndu-le :
a) polinoame în nedeterminata X ; b) polinoame în nedeterminata Y.

10) Efectuaţi calculele :

$$[(X^2 - 9) \cdot (X^2 + 2X)] : [(X + 2)(X - 3)] ; (X^2 - 3X)^2 : (X + 2)^2.$$

3. DIVIZIBILITATEA POLINOAMELOR. POLINOAME IREDUCTIBILE

Definiţie. Vom spune că polinomul $Q(X)$ **divide** polinomul $P(X)$ dacă există un polinom $C(X)$ astfel încît $P(X) = Q(X) \cdot C(X)$ (adică dacă restul împărţirii lui $P(X)$ la $Q(X)$ este polinomul nul). În acest caz vom nota $Q(X) \mid P(X)$ sau $Q \mid P$ (şi vom citi „Q divide pe P").

Dacă $Q \mid P$, vom mai spune că polinomul P este **multiplu** al polinomului Q, sau că P se divide cu Q.

De exemplu, $X + 1$ divide pe $X^2 - 1$, deoarece $X^2 - 1 = (X + 1) \cdot (X - 1)$; scriem $(X + 1) \mid (X^2 - 1)$.

Polinomul $2X^3 - 1$ divide polinomul $2X^5 + 6X^3 - X^2 - 3$, deoarece $2X^5 + 6X^3 - X^2 - 3 = (2X^3 - 1) \cdot (X^2 + 3)$.

Polinomul constant 2 divide polinomul $2X + 4$, deoarece $2X + 4 = 2 \cdot (X + 2)$; constanta 2 divide şi polinomul $X + 1$, deoarece $X + 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} X + \frac{1}{2}\right)$.

Polinomul X nu divide polinomul $X^2 + 1$, deoarece împărţind pe $X^2 + 1$ la X obţinem restul 1 ; la fel, $X + 3$ nu divide pe $X^3 + 3X - 5$.

Observaţie. Polinomul constant 2 divide polinomul constant 3, deoarece $3 = 2 \cdot \frac{3}{2}$. Nu confundaţi divizibilitatea polinoamelor cu divizibilitatea numerelor naturale !

EXERCIŢII

1) Stabiliţi dacă polinomul Q divide sau nu polinomul P, unde a) $P = 4X^5 - 3$, $Q = 3X - 2$; b) $P = X^3 - 2X + 1$, $Q = X - 1$; c) $P = X^3 - 8$, $Q = X^2 + 2X + 4$; d) $P = X^5 + 1$, $Q = X - 1$; e) $P = X^6 - 1$, $Q = X^2 + X + 1$; f) $P = 3X^2 - 14X + 15$, $Q = 2X - \frac{10}{3}$.

2) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:
a) $(X^2 - 1) \mid (X - 1)$; b) $(X + 1) \mid (X^2 + 1)$; c) $(X - 2) \mid (X^2 - X - 2)$; d) $3 \mid 4X$; e) $(X + 1) \mid (2X - 1)$.

3) Pentru ce valori ale lui m, polinomul $2X^5 + 5X^2 + m$ se divide cu polinomul $X + 2$?

4) Fie polinomul $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$; scrieţi trei polinoame care îl divid. Aceeaşi problemă pentru polinomul $X^3 - 3X^2 + 9X - 27$.

5) Arătaţi că dacă polinomul R divide polinomul Q, iar polinomul Q divide polinomul P, atunci R divide pe P. Ce proprietate a relaţiei de divizibilitate între polinoame este aceasta?

6) Arătaţi că dacă Q divide pe P şi pe R, atunci Q îl divide şi pe $P + R$.

Definiţie. Vom spune că un polinom $P(X)$ este **reductibil** dacă poate fi scris ca produs de polinoame:

$$P(X) = Q(X) \cdot R(X),$$

factorii Q şi R avînd gradele ≥ 1.

De exemplu, polinomul $X^2 - 1$ este reductibil:

$$X^2 - 1 = (X + 1) \cdot (X - 1);$$

de asemenea, polinomul $X^2 + X - 2$ este reductibil:

$$X^2 + X - 2 = (X - 1) \cdot (X + 2).$$

Şi polinomul $X^4 + 1$ este reductibil:

$$X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}\, X + 1) \cdot (X^2 - \sqrt{2}\, X + 1).$$

Ca exemple de polinoame ce nu sînt reductibile avem în primul rînd polinomul nul; apoi polinoamele constante $\neq 0$; celelalte polinoame ce nu sînt reductibile vor fi numite **ireductibile.**

Observaţi schema de clasificare a polinoamelor:

— **Polinoame ireductibile**
— **Polinomul nul**
— **Polinoame constante $\neq 0$**
— **Polinoame reductibile**

Comparaţi-o cu schema de clasificare a numerelor naturale:

— Numere prime
— Numărul 0
— Numărul 1
— Numere compuse

Vom arăta că polinoamele de gradul 1 sînt ireductibile.
Să considerăm polinomul de gradul 1 :

$$aX + b,\ a \neq 0.$$

Dacă am presupune că este reductibil :

$$aX + b = Q(X) \cdot R(X)$$

cu gradele lui Q şi R mai mari decît 1, atunci din compararea gradelor am obţine $1 \geq 1 + 1$, ceea ce este absurd. Deci orice polinom de gradul 1

$$aX + b,\ a \neq 0$$

este ireductibil.

EXERCIŢII

1) Descompuneţi în factori polinoamele :
a) $X^2 - 1$; b) $X^3 - 1$; c) $X^4 - 1$; d) $X^6 - 1$; e) $X^8 - 1$; f) $X^9 - 1$.

2) Precizaţi care polinoame sînt reductibile :
a) $X^2 - 4$; b) $X^2 - 2$; c) $X^2 - 4X + 4$; d) $2X + 2$; e) $4X - 2$; f) $X^4 + 8$; g) $X^2 + 2$; h) $X^4 + 1$.

3) Fie $P(X) = X^3 + 2X^2 - 3X - 1$. Calculaţi $P(-2)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(\sqrt{2})$, $P(\sqrt{3})$ şi $P(2)$. (Notăm cu $P(a)$ numărul obţinut înlocuind în polinom nedeterminata X cu numărul a şi efectuind operaţiile indicate ; de exemplu, $P(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 1 = 35$.)

4) Fie $P(X) = X^3 - 2X^2 - 4X - 5$ şi $Q(X) = [(X - 2) \cdot X - 4] \cdot X - 5$. Calculaţi $P(a)$ şi $Q(a)$ pentru $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Ce observaţi ? De ce ?

4. ÎMPĂRŢIREA PRIN BINOMUL $X - a$

Să luăm de exemplu polinomul $P(X) = X^3 - X + 1$ şi să-l împărţim la binomul $X - 2$:

$$\begin{array}{rrr|l} X^3 & & -X+1 & X-2 \\ \cline{4-4} -X^3 & +2X^2 & & X^2+2X+3 \\ \cline{1-2} & 2X^2 & -X & \\ & -2X^2 & +4X & \\ \cline{2-3} & & 3X+1 & \\ & & -3X+6 & \\ \cline{3-3} & & 7 & \end{array}$$

Obţinem cîtul $X^2 + 2X + 3$ şi restul 7. Pe de altă parte, să calculăm numărul $P(2)$: $P(2) = 2^3 - 2 + 1 = 7$. Observăm că restul împărţirii este exact $P(2)$. Este oare aceasta o întîmplare ?

Să considerăm un polinom $P(X)$ şi să-l împărţim (cu rest) la binomul $X - a$; teorema împărţirii cu rest ne spune că există polinoamele $C(X)$ şi $R(X)$ astfel încît :

a) $P(X) = (X - a) \cdot C(X) + R(X)$,

b) gradul lui R este mai mic decît gradul lui $X - a$.

Însă gradul lui $X - a$ este 1 ; aşadar polinomul rest $R(X)$ este constant : $R(X) = r$. Putem deci scrie :

$$P(X) = (X - a) \cdot C(X) + r.$$

Putem afla restul r fără a face împărţirea ? În egalitatea de mai sus să înlocuim nedeterminata X prin numărul a :

$$P(a) = (a - a) \cdot C(a) + r.$$

Deoarece $a - a = 0$, obţinem că $r = P(a)$. Am dovedit de fapt următoarea :

Teoremă. Restul împărţirii polinomului $P(X)$ la binomul $X - a$ se obţine calculînd valoarea $P(a)$.

Cum calculăm valoarea $P(a)$? Să luăm cîteva exemple.

Fie $P(X) = X^2 + 2X + 3$; atunci $P(a) = a \cdot a + 2 \cdot a + 3$. Observăm că pentru a obţine pe $P(a)$ trebuie să efectuăm două înmulţiri, apoi două adunări. Dacă scriem însă $P(X) = (X + 2) \cdot X + 3$, atunci pentru a obţine pe $P(a) = (a + 2) \cdot a + 3$ efectuăm doar o înmulţire şi două adunări.

Alt exemplu. Fie polinomul $T(X) = X^3 + 5X^2 - 6X + 4$; atunci $T(a) = a \cdot (a \cdot a) + 5 \cdot (a \cdot a) - 6 \cdot a + 4$. Pentru a-l obţine pe $T(a)$ sînt necesare deci 4 înmulţiri şi 3 adunări (scăderea este considerată adunare). Putem proceda mai economic, calculînd cu formula $T(X) = [(X + 5) \cdot X - 6] \cdot X + 4$; efectuăm doar 2 înmulţiri şi 3 adunări.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Aflaţi valorile lui m şi n astfel încît polinomul $P(X) = X^2 + mX + n$ să dea restul 2 la împărţirea cu $X - 1$ şi restul 5 la împărţirea cu $X - 3$. Ce rest vom obţine dacă vom împărţi polinomul $P(X)$ la $X - 2$?

Rezolvare. Scriem $P(1) = 2$ şi $P(3) = 5$, adică :

$$\begin{cases} 1 + m + n = 2, \\ 9 + 3m + n = 5. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem de ecuaţii, obţinem $m = -\frac{5}{2}$, $n = \frac{7}{2}$.

Putem calcula acum restul împărţirii polinomului la $X - 2$:

$$P(2) = 2^2 - \frac{5}{2} \cdot 2 + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}.$$

EXERCIŢII

1) Aflaţi restul împărţirii polinomului $5X^4 - 21X^2 + 7$ la binomul :

a) $X - 1$; b) $X - 2$; c) $X + 1$; d) $X - \frac{1}{2}$; e) $X - \sqrt{2}$.

2) Aflați restul împărțirii la binomul $X - 2$ a polinoamelor :
a) $2X^2 + X - 10$; b) $3X^4 - 4X^2 - 5X - 2$; c) $2X^4 - 3X + 5$; d) $4X^6 - X^2 + 5$; e) $3X^2 - 8X - 3$.

3) Aflați restul împărțirii polinomului $3X^3 - mX^2 + 15$ la $X - 4$, știind că împărțit la $X - 2$ dă restul -3.

4) Aflați restul împărțirii polinomului $X^3 + 3aX + a - 1$ la binomul $X - a$, știind că prin împărțirea la $X - 3$ dă restul 5.

5) Împărțind polinomul $2X^3 - mX^2 + nX - 16$ la $X - 3$ și $X + 1$, obținem în ambele cazuri restul -2. Ce rest vom obține dacă-l vom împărți la $X - 1$?

6*) Arătați că dacă împărțind polinomul $P(X)$ la $X - \frac{u}{v}$ obținem restul r, atunci împărțindu-l la $vX - u$ obținem același rest r.

În clasa a V-a am învățat criterii de divizibilitate cu anumite numere prime : 2, 3, 5. Vom stabili acum un criteriu de divizibilitate cu polinomul ireductibil $X - a$.

Teoremă. Un polinom $P(X)$ este divizibil cu binomul $X - a$ dacă și numai dacă $P(a) = 0$.

Demonstrație. Dacă $P(X)$ este divizibil cu $X - a$, atunci restul împărțirii lui $P(X)$ la $X - a$ este 0 ; însă acest rest coincide cu $P(a)$.

Reciproc, dacă $P(a) = 0$, atunci teorema împărțirii cu rest ne asigură că există un polinom $C(X)$ astfel încît $P(X) = (X - a) \cdot C(X)$, ceea ce înseamnă că $P(X)$ se divide cu $X - a$. Teorema este demonstrată.

Observație. Dacă într-un polinom $P(X)$ suma coeficienților este 0, atunci $P(1) = 0$, deci polinomul este divizibil cu $X - 1$. De exemplu, polinoamele

$$2X^2 - 3X + 1,\ 5X^6 - 3X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 2X - 2,\ X^8 - 2X + 1$$

se divid cu $X - 1$.

EXERCIȚII

1) Care dintre polinoamele de mai jos sînt divizibile cu $X - 1$?
a) $7X^3 - 5X^2 + 4$; b) $6X^3 - 5X - 1$; c) $42X^2 + 27X - 69$; d) $X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X + 3$; e) $2X^3 - 3X^2 + 8X - 5$.

2) Verificați dacă primul polinom este divizibil sau nu cu al doilea ; în caz afirmativ aflați cîtul :

a) $2X^2 + X - 10$ și $X + \frac{5}{2}$; b) $4X^3 - 5X^2 + 9X + 1$ și $X - 3$; c) $3X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 5X - 38$ și $X - 2$; d) $2X^4 - 3X + 5$ și $X - 3$.

3) Să presupunem că $a \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Pentru ce valori ale lui a, *polinomul* :
a) $X^3 + X^2 - 9X - 9$; b) $X^3 + 3X^2 - 4X - 12$; c) $X^3 - 3X^2 - X + 3$; d) $X^3 - 4X^2 - 9X + 36$; e) $X^4 - 10X^2 + 9$; f) $X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X$, este divizibil cu $X - a$?

5. DESCOMPUNEREA POLINOAMELOR ÎN FACTORI. FORMULE SPECIALE

Scrierea unui polinom ca produs de factori ireductibili prezintă aceleaşi avantaje ca şi scrierea unui număr natural ca produs de factori primi ; este utilă în special atunci cînd efectuăm operaţii cu fracţii.

Nu putem descompune întotdeauna *efectiv* un polinom în factori ireductibili ; de cele mai multe ori ne limităm la a-l descompune în doi factori.

În clasa a VII-a am învăţat cîteva formule speciale, care ne ajută în descompunerea în factori a polinoamelor. Să le reamintim :

— formula de scoatere a factorului comun : $\mathbf{a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)}$

— formula de restrîngere a pătratului binomului : $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$

— formula de descompunere în factori a diferenţei pătratelor : $\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$

Să folosim aceste formule pe cîteva exemple.

Exemplul 1. Polinomul $X^8 + 4X^6$ se descompune în factori în mod evident : $X^6(X^2 + 4)$. La fel, polinomul $\frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{6}X^2 - \frac{1}{3}X$ se descompune de exemplu astfel : $X \cdot \left(\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X - \frac{1}{3}\right)$, sau astfel :

$$\frac{1}{2}X \cdot (3X^2 + X - 2).$$

Exemplul 2. Constatăm imediat că polinomul $X^8 + 4X^4 + 4$ este pătratul unui binom : $(X^4 + 2)^2$. La fel, polinomul $(5X + 2)^2 + 2(5X + 2) + 1$ este pătratul lui $(5X + 2) + 1 = 5X + 3$.

Exemplul 3. Polinomul $25X^4 - 9$ poate fi descompus în produsul $(5X^2 + 3)(5X^2 - 3)$, sau în produsul $(5X^2 + 3)(\sqrt{5}X + \sqrt{3})(\sqrt{5}X - \sqrt{3})$; ultima descompunere este o descompunere în factori ireductibili.

EXERCIŢII

1) Eliminaţi parantezele :

a) $(2X + 4)^2$; b) $(2X - 3)(X + 5)$; c) $5X\left(\frac{1}{5}X + 2\right)^2$; d) $2X(3X - 8)(X - 3)$; e) $(X - 1)(X - 3)(X - 5)$.

2) Scoateţi factor comun :

a) $14X^5 - 3X^3$; b) $8X^4 + 4X^3 + X^2$; c) $(3X - 1)^2 + 5(3X - 1)$; d) $(6X + 1)^4 + 3(6X + 1)^3$;

e) $2\left(X+\frac{1}{2}\right)+\left(X+\frac{1}{2}\right)^2$; f) $(X+3)(X-4)+(X-4)^2+(X+6)(X-4)$.

3) Completați pînă la pătratul unui binom :
a) $9X^4 + ... + 25$; b) $9X^4 - ... + 100$; c) $25 - 10X^3 + ...$; **d)** $16 + 24X + ...$; **e)** $4X^6 - 12X^3 + ...$.
4) Restrîngeți :

a) $X^6 + X^3 + 0{,}25$; b) $9X^4 - 12X^2 + 4$; c) $9 - 12X^2 + 4X^4$; **d)** $\frac{1}{2}X^2 + X + \frac{1}{2}$;
e) $12X^2 - 12X + 3$.
5) Descompuneți în factori :
a) $49X^6 - 16$; b) $(3X+2)^2 - (2X+3)^2$; c) $(5X+1)^2 - 16X^2$; **d)** $8X^4 - 2X^2$; **e)** $25X^6 - 16X^4$.

6*) Descompuneți în factori :

a) $X^2 - 2$; b) $X^4 - 3X^2$; c) $2X^3 - X$.

O altă formulă specială, mult utilizată în descompunerile în factori, este **formula diferenței cuburilor :**

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Asemănătoare este și formula sumei cuburilor :

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Observați cu atenție deosebirile dintre cele două formule.

EXERCIȚII

1) Descompuneți în factori polinoamele :
a) $8X^3 - 27$; b) $(X+2)^3 + (X-2)^3$; c) $\frac{1}{64}X^4 - X$; **d)** $X^6 - 27X^3$; **e)** $8X^3 + 125$; **f)** $16X^9 + \frac{1}{4}$.
2) Descompuneți în factori :
a) $X^3 + 2X^2(X-1) - 1$; b) $X^6 + 2X^3 + 1$; c) $X^5 + X^3 - X^2 - 1$; d) $X^5 - X^3 + X^2 - 1$.

3*) Descompuneți în factori :

a) $X^3 - 2$; b) $X^3 - 3$; c) $X^3 - 4$; d) $X^3 + 2$.

Uneori putem descompune un polinom în factori căutîndu-i un factor de gradul 1.

De exemplu, fie polinomul $P(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$. Suma coeficienților săi, $1 - 5 + 8 - 4$, este 0. Deci polinomul se divide cu $X - 1$. Efectuînd împărțirea, obținem $P(X) = (X-1)\cdot(X^2 - 4X + 4)$ și observăm că putem descompune $P(X) = (X-1)(X-2)^2$.

Alt exemplu. Să descompunem în factori polinomul $T(X) = X^4 - 7X^2 - 12X + 18$. Deoarece suma coeficienților săi este 0, polinomul se divide cu $X - 1$: $T(X) = (X-1)(X^3 + X^2 - 6X - 18)$. Deoarece $3^3 + 3^2 - 6\cdot 3 - 18 = 0$, putem descompune $X^3 + X^2 - 6X - 18 = (X-3)(X^2 + 4X + 6)$. Deci am descompus : $T(X) = (X-1)(X-3)(X^2 + 4X + 6)$.

Din exemplele de mai sus rezultă că în general, descompunerea în factori a unui polinom este dificil de executat. Nu există reguli generale de lucru ; trebuie folosite toate posibilităţile avute la îndemînă, uneori chiar artificii de calcul ce denotă ingeniozitate.

Observaţie. Dacă un polinom are toţi coeficienţii numere întregi şi se divide cu $X - a$, unde $a \in \mathbf{Z}$, atunci a este divizor al termenului liber al polinomului. Verificaţi aceasta pe exemplele de mai sus.

EXERCIŢII

1) Descompuneţi în factori :

a) $X^2 - X - 6$; b) $X^2 + X - 6$; **c)** $X^2 - 10X + 16$; **d)** $X^2 - 7X + 12$; **e)** $X^2 - 9X + 18$; f) $3X^2 - 7X + 2$.

2) Descompuneţi în factori :

a) $X^3 - 7X + 6$; b) $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$; c) $X^3 - 7X - 36$; d) $X^3 - 3X + 2$; e) $X^3 - 12X + 16$; f) $4X^3 - 4X^2 - 9X + 9$.

3) Descompuneţi în factori :

a) $X^4 - 25X^2 + 60X - 36$; b) $X^4 - 6X^3 + 11X^2 + 6X - 24$; c) $X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4$; d) $X^4 - 5X^2 + 4$; e) $X^4 + 4X^2 - 32$; f) $X^5 - X^3 - 8X^2 + 8$.

Polinoamele în mai multe nedeterminate se descompun mult mai greu în factori. Nu există metode generale ; reuşita descompunerii depinde foarte mult de utilizarea adecvată a formulelor speciale.

De exemplu, pentru a descompune în factori polinomul

$$X^2 + 2XY + Y^2 + XZ + YZ,$$

grupăm termenii în două grupe : prima grupă (formată din primii trei termeni) este pătratul unui binom ; în a doua grupă scoatem factor comun pe Z. Polinomul se scrie : $(X + Y)^2 + (X + Y)Z$. Scoţînd încă o dată factor comun, am descompus în factori : $(X + Y)(X + Y + Z)$.

Alt exemplu : fie polinomul $9X^2 - 6XY + Y^2 - 9$. Primii trei termeni pot fi restrînşi ; polinomul devine : $(3X - Y)^2 - 9$. Folosind formula diferenţei pătratelor, am reuşit descompunerea polinomului în factori :

$$(3X - Y + 3)(3X - Y - 3).$$

Alte exemple :

$X^4 - 3X^2Y^2 + Y^4 = X^4 - 2X^2Y^2 + Y^4 - X^2Y^2 = (X^2 - Y^2)^2 - (XY)^2 = (X^2 - Y^2 + XY)(X^2 - Y^2 - XY)$;

$X^2Y^2 + X^2 - Y^2 - 1 = X^2(Y^2 + 1) - (Y^2 + 1) = (X^2 - 1)(Y^2 + 1) = (X + 1)(X - 1)(Y^2 + 1)$;

$X^2 - Y^2 - Z^2 + 2YZ - 2X + 1 = (X^2 - 2X + 1) - (Y^2 - 2YZ + Z^2) = (X - 1)^2 - (Y - Z)^2 = (X + Y - Z - 1)(X - Y + Z - 1)$;

$X^2 - 5XY + 6Y^2 = X^2 - 2XY - 3XY + 6Y^2 = X(X - 2Y) - 3Y(X - 2Y) = (X - 3Y)(X - 2Y)$;

$X^4 + X^2Y^2 + Y^4 = X^4 + 2X^2Y^2 + Y^4 - X^2Y^2 = (X^2 + Y^2)^2 - (XY)^2 = (X^2 + XY + Y^2)(X^2 - XY + Y^2)$;

$$X^5 - X^4Y + X^3Y^2 - X^2Y^3 + XY^4 - Y^5 = X^4(X - Y) + X^2Y^2(X - Y) + Y^4(X - Y) = (X^4 + X^2Y^2 + Y^4)(X - Y) = (X^2 + XY + Y^2)(X^2 - XY + Y^2)(X - Y).$$

EXERCIȚII

1) Descompuneți în factori (toate literele care apar sînt considerate nedeterminate):

a) $X^3 - X^2Y + XY^2 - Y^3$; b) $A^3 + A^2B + AB^2 + B^3$; c) $X^2 + AX + BX + AB$; d) $XY + 3X + 5Y + 15$; e) $X^2Y + XY^2 + aXY - a^2X - a^2Y - a^3$; f) $X^3 + aX^2 + 3a^2X + 3a^3$.

2) Descompuneți în factori:

a) $X^4 + 2X^2Y^2 - 3Y^4$; b) $X^6 - Y^6$; c) $9X^2 - 12XY + 4Y^2$; d) $9X^2 - 12XY + 3Y^2$; e) $81X^2Y^2 - 16Y^4$; f) $27X^3 - 64Y^3$.

3*) Descompuneți în factori:

a) $(XY + 1)^3 + (X + Y)^3$; b) $(X - Y)(X^2 - Z^2) + (X - Z)(X^2 - Y^2)$; c) $X^2 - a^2 - b^2 + 2ab$; d) $(aX + bY)^2 + (bX - aY)^2$; e) $X^3 - 2XY^2 + Y^3$; f) $(X + Y)^4 - (X^2 - 4XY + Y^2)^2$; g) $X^4 + 2X^2Y^2 + 9Y^4$.

4) Descompuneți în factori ireductibili, căutînd mai întîi un factor de forma $X - a$:

a) $X^3 - 2X^2 - 5X + 6$; b) $X^3 - 4X^2 + X + 6$; c) $X^3 + 2X^2 - 5X - 6$; d) $X^3 - 2{,}3X^2 - 1{,}7X + 3$; e) $X^3 + 3X^2 + 4X + 2$.

6. CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN ȘI CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN A DOUĂ POLINOAME

Fie polinomul $T(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$. Care sînt polinoamele care îl divid? Observînd că se divide cu $X - 1$, putem să-l descompunem în factori: $T(X) = (X - 1)(X - 2)^2$.

Acum este evident că polinomul $T(X)$ se divide cu $X - 1$, cu $X - 2$, cu $(X - 1)(X - 2) = X^2 - 3X + 2$ și cu $(X - 2)^2 = X^2 - 4X + 4$.

Fie polinoamele:

$$P(X) = 6X^5 - 24X^3 \text{ și } Q(X) = 3X^3 - 12X^2 + 12X.$$

Descompunîndu-le în factori, putem scrie:

$$P(X) = 6X^3(X + 2)(X - 2), \ Q(X) = 3X(X - 2)^2.$$

Să observăm că binomul $X - 2$ este divizor al ambelor polinoame $P(X)$ și $Q(X)$; spunem despre el că este **divizor comun** polinoamelor P și Q. De asemenea, polinoamele X și $X(X - 2) = X^2 - 2X$ sînt divizori comuni polinoamelor P și Q.

Iată lista polinoamelor care sînt divizori comuni lui P și Q:

— polinoamele constante a;
— polinoamele de forma aX;
— polinoamele de forma $a(X - 2)$;
— polinoamele de forma $aX(X - 2)$,

} unde a este un număr real $\neq 0$.

Observăm că toţi divizorii comuni lui P şi Q divid şi pe $X(X-2) = X^2 - 2X$; acesta este numit cel mai mare divizor comun al polinoamelor P şi Q.

Dacă luăm polinomul $3X(X-2)$ şi polinomul $2X(X-2)$, observăm că ele sînt multipli ai tuturor divizorilor lui P şi Q; putem să le numim şi pe ele „cel mai mare divizor comun al polinoamelor P şi Q"; preferăm însă să lucrăm cu $X(X-2) = X^2 - 2X$, deoarece coeficientul termenului de gradul cel mai înalt este 1.

Să observăm că divizorii comuni lui P şi Q au gradele 0, 1 şi 2, iar cel mai mare divizor comun lui P şi Q are gradul 2.

Definiţie. Fie două polinoame $P(X)$ şi $Q(X)$. Un polinom $D(X)$ ce are următoarele proprietăţi:

1) este divizor al lui $P(X)$ şi al lui $Q(X)$;

2) orice divizor al lui P şi Q este divizor şi al lui $D(X)$, va fi numit **cel mai mare divizor comun** al polinoamelor P şi Q.

Observaţii. 1) Cel mai mare divizor comun a două polinoame *nu este unic*; orice polinom de forma $aD(X)$, unde a este un număr real $\neq 0$, are şi el proprietăţile 1) şi 2).

2) Cel mai mare divizor comun a două polinoame P şi Q este divizor comun al lui P şi al lui Q; gradul său este cel mai mare dintre gradele divizorilor comuni lui P şi Q.

Cum putem obţine efectiv cel mai mare divizor comun a două polinoame?

Dacă polinoamele P şi Q **sînt descompuse în factori ireductibili,** atunci cel mai mare divizor comun al lor se obţine luînd produsul factorilor ireductibili comuni, la puterea cea mai mică cu care apar în cele două descompuneri.

De exemplu, fie polinoamele:

$$P(X) = X^5 + 6X^4 + 13X^3 + 14X^2 + 12X + 8 = (X+2)^3(X^2+1) \text{ şi}$$
$$Q(X) = 2X^5 + 6X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 8 = 2(X+2)^2(X^2+1)(X-1).$$

În cele două descompuneri apar factorii ireductibili $X+2$, X^2+1 şi $X-1$. Dintre aceştia, doar primii doi apar în ambele descompuneri. Factorul $X+2$ apare cu exponenţii 3 şi 2, deci va apărea cu exponentul 2 în cel mai mare divizor comun al polinoamelor P şi Q. Cel mai mare divizor comun al lui P şi Q va fi polinomul:

$$D(X) = (X+2)^2(X^2+1) = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 4X + 4.$$

Alt exemplu. Fie $A(X) = 2X + 1$ şi $B(X) = (X-1)(X+3)$. Nu există nici un factor ireductibil comun polinoamelor A şi B; deci cel mai mare divizor comun al lui A şi B este 1; polinoamele A şi B sînt prime între ele.

EXERCIŢII

1) Aflaţi cel mai mare divizor comun al polinoamelor:
a) $(X-1)(X-2)(X-3)$ şi $(X+1)(X-2)(X+3)$; b) $(X-1)^2(X+5)$ şi $(X-1)(X+5)^2$; c) $(X+3)(X-3)$ şi $(X+3)^2$; d) $14X(X+7)$ şi $4X^2(X-7)$; e) $3X^3(X-1)^2(X+1)(X^2+1)$ şi $4X(X-1)^2(X^2+1)$. Scrieţi-l în formă canonică.

2) Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor :

a) $X^3 - X$ și $X^3 + 2X^2 + X$; b) $X^2 + X$ și $X^2 + 2X + 1$; c) $4X^2 + 12X + 9$ și $8X^3 + 27$; d) $X^2 - 3X + 2$ și $X^2 + X - 2$; e) $8X^2 - 32$ și $2X^2 - 14X + 20$; f) $X^2 - 7X + 12$ și $3X^2 - 6X - 24$; g) $2X^2 + 2X - 4$ și $4X^2 - 12X - 40$; h) $X^2 - X - 2$ și $X^3 - X^2 - 4X + 4$.

3) Scrieți un polinom $P(X)$ de gradul 2 astfel încît cel mai mare divizor comun al lui $P(X)$ și $Q(X)$ să fie $D(X)$, unde :

a) $Q(X) = X^3 + 1$, $D(X) = X + 1$; b) $Q(X) = 2X^2 - 8$; $D(X) = X - 2$; c) $Q(X) = 9X^2 - 12X + 4$, $D(X) = 3X - 2$.

4) Aflați cel mai mare divizor comun al polinoamelor :

a) $X^2 - XY$ și $X^2 - 2XY + Y^2$; b) $6(X^2 - Y^2)^3$ și $9(X^4 - Y^4)(X - Y)^2$.

5) Arătați că polinoamele :

a) $X^2 + 1$ și $X^3 + 1$; b) $X^2 + 3X + 2$ și $X^3 - 1$ sînt prime între ele.

Nu întotdeauna putem descompune efectiv polinoamele în factori ireductibili. Metoda de aflare a celui mai mare divizor comun, prezentată mai înainte, nu este aplicabilă întotdeauna. De aceea vom prezenta încă o metodă, algoritmică, numită *algoritmul lui Euclid**.

Să luăm de exemplu polinoamele $P(X) = X^2 + 2X - 24$ și $Q(X) = X^2 + X - 20$.

Împărțim polinomul P la polinomul Q :

$$\begin{array}{r|l} X^2 + 2X - 24 & X^2 + X - 20 \\ \cline{2-2} -X^2 - X + 20 & 1 \\ \hline X - 4 & \end{array}$$

Obținem cîtul 1 și restul $R_1(X) = X - 4$:

$$P(X) = Q(X) \cdot 1 + (X - 4).$$

Împărțim polinomul Q la polinomul R_1 :

$$\begin{array}{r|l} X^2 + X - 20 & X - 4 \\ \cline{2-2} -X^2 + 4X & X + 5 \\ \hline 5X - 20 & \\ -5X + 20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Obținem cîtul $X + 5$ și restul $R_2(X) = 0$:

$$Q(X) = R_1(X) \cdot (X + 5) + 0.$$

Deoarece restul R_2 este 0, algoritmul se oprește ; restul $R_1(X) = X - 4$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q.

Alt exemplu. Fie polinoamele $P(X) = X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 4X + 4$ și $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 2X - 6$.

---

* Euclid — matematician grec ce a trăit în secolul III î.e.n. în orașul Alexandria (Egipt) ; este autorul unui faimos tratat de geometrie.

Împărţim polinomul P la polinomul Q (efectuaţi împărţirea !). Obţinem cîtul $X + 1$ şi restul $R_1(X) = 5X^2 + 10$:

$$P(X) = Q(X) \cdot (X + 1) + (5X^2 + 10).$$

Împărţim polinomul Q la polinomul R_1 (efectuaţi !). Obţinem cîtul $\frac{1}{5}X - \frac{3}{5}$ şi restul $R_2(X) = 0$:

$$Q(X) = R_1(X) \cdot \left(\frac{1}{5}X - \frac{3}{5}\right) + 0.$$

Deoarece restul R_2 este 0, algoritmul se opreşte ; restul $R_1(X) = 5X^2 + 10$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor P şi Q.

Observaţie. Putem spune că şi $X^2 + 2$ este cel mai mare divizor comun al polinoamelor P şi Q.

Alt exemplu. Să aplicăm algoritmul lui Euclid polinoamelor $P(X) = 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 - 2X - 4$ şi $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 4X - 4$.

Împărţim polinomul P la polinomul Q. Obţinem cîtul $2X + 4$ şi restul $R_1(X) = 2X^2 - 10X + 12$:

$$P(X) = Q(X) \cdot (2X + 4) + (2X^2 - 10X + 12).$$

Împărţim polinomul Q la polinomul R_1. Obţinem cîtul $\frac{1}{2}X + 1$, iar restul $R_2(X) = 8X - 16$:

$$Q(X) = R_1(X) \cdot \left(\frac{1}{2}X + 1\right) + (8X - 16).$$

Împărţim polinomul R_1 la polinomul R_2. Obţinem cîtul $\frac{1}{4}X - \frac{3}{4}$ şi restul $R_3(X) = 0$:

$$R_1(X) = R_2(X) \cdot \left(\frac{1}{4}X - \frac{3}{4}\right) + 0.$$

Algoritmul se opreşte aici. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor P şi Q este ultimul rest $\neq 0$ obţinut, anume $R_2(X) = 8X - 16$.

EXERCIŢII

1) Folosind algoritmul lui Euclid, calculaţi cel mai mare divizor comun al polinoamelor: a) $X^2 + 3X + 2$ şi $X^2 - X - 2$; b) $X^2 - 5X + 4$ şi $X^2 + 2X - 63$; c) $12X^2 + 5X - 3$ şi $6X^2 + X - 1$; d) $5X^3 - 4X - 1$ şi $X^2 - 2X + 1$.

2) Aflaţi cel mai mare divizor comun al polinoamelor :

a) $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ şi $X^3 - 8X^2 + 19X - 12$; b) $6X^3 + 13X^2 + 15X - 25$ şi $2X^3 + 4X^2 + 4X - 10$; c) $6X^4 + X^3 - X$ şi $4X^3 - 6X^2 - 4X + 3$; d) $2X^4 - 12X^3 + 19X^2 - 6X + 9$ şi $4X^3 - 18X^2 + 19X - 3$; e) $X^4 + 2X^3 - X + 2$ şi $X^4 - X^3 + 2X^2 + X + 3$; f) $2X^5 - 11X^2 - 9$ şi $4X^5 + 11X^4 + 81$; g) $3X^5 - X^4 - 3X + 1$ şi $3X^4 + X^3 + X^2 + X - 2$; h) $X^8 - 17X^4 + 16$ şi $X^7 - 12X + 11$.

3) Sînt polinoamele $3X^2 - 4X + 1$ și $2X^2 + X + 1$ prime între ele ? Dar polinoamele $4X^2 - 5X + 1$ și $X^2 - 5X + 4$?

Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$ este un polinom $M(X)$ ce are proprietățile :

— polinoamele $P(X)$ și $Q(X)$ divid polinomul $M(X)$;

— dacă $P(X)$ și $Q(X)$ divid un polinom $T(X)$, atunci și polinomul $M(X)$ îl divide pe $T(X)$.

Cu alte cuvinte :

— $M(X)$ este un multiplu al polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$;

— dacă $T(X)$ este multiplu al polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$, atunci $T(X)$ este multiplu și al lui $M(X)$.

Între polinoamele $P(X)$, $Q(X)$, cel mai mare divizor comun $D(X)$ al lor și cel mai mic multiplu comun $M(X)$ al lor există relația :

$$P(X) \cdot Q(X) = D(X) \cdot M(X)$$

Această relație ne permite să-l aflăm pe $M(X)$, dacă îl cunoaștem pe $D(X)$:

$$M(X) = [P(X) \cdot Q(X)] : D(X)$$

Dacă polinoamele $P(X)$ și $Q(X)$ sînt descompuse în factori ireductibili, atunci $M(X)$ poate fi luat produsul tuturor factorilor ce apar în descompuneri, fiecare factor la puterea cea mai mare.

De exemplu, cel mai mic multiplu comun al polinoamelor $P(X) = (X - 1)^2(X + 2)(X + 3)$ și $Q(X) = (X - 1)(X + 2)^3$ este polinomul $M(X) = (X - 1)^2(X + 2)^3(X + 3)$.

EXERCIȚIU REZOLVAT

Să aflăm cel mai mic multiplu comun al polinoamelor $2X^3 - X^2$, $2X^2 + X$ și $4X^2 - 1$.

Rezolvare. Descompunem cele trei polinoame în factori ireductibili :

$$2X^3 - X^2 = X^2(2X - 1),$$
$$2X^2 + X = X(2X + 1),$$
$$4X^2 - 1 = (2X + 1)(2X - 1).$$

În descompuneri apar factorii ireductibili X, $2X - 1$ și $2X + 1$. Primul apare cu exponentul 2 în prima descompunere. Cel mai mic multiplu comun va fi $X^2(2X - 1)(2X + 1) = 4X^4 - X^2$

EXERCIȚII

1) Aflați cel mai mic multiplu comun al polinoamelor :

a) $(X - 1)^2(X - 2)$ și $(X - 1)(X - 2)^2$; b) $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$ și $(X - 1)^2(X - 3)$; c) $(X - 1)^7$ și $(X - 1)(X + 1)^2$.

2) Aflaţi cel mai mic multiplu comun al polinoamelor :

$X^2 - (a + b)X + ab$ şi $X^2 - (a + c)X + ac$.

Scrieţi-l în formă canonică.

3) Aflaţi cel mai mic multiplu comun al polinoamelor :

a) $X^2 - 4X$ şi $X^2 - 8X + 16$; b) $X^2 + 2X$ şi $X^3 + 8$; c) $X^3 + 1$ şi $X^3 - X^2 + X$; d) $9X^2 + 12X + 4$ şi $27X^3 + 8$; e) $X^3 - X$ şi $X^3 - 1$; f) $X^2 - 3X + 2$ şi $X^2 - X - 2$.



4) Aflaţi cel mai mic multiplu comun al polinoamelor :

a) $1 - X$, $1 + X$ şi $1 - X^2$; b) $(X + 2)^2$, $(X + 2)(X + 1)$ şi $(X + 2)(X + 3)$; c) $X - 2$, $(X - 2)^2$ şi $(X - 2)^3$; d) X, $X - 1$ şi $X^2 - 1$; e) $3X - 1$, $3X + 1$ şi $1 - 9X^2$; **f)** $3X^2 + 5$ şi $4X^2 - X + 1$.

5*) Aflaţi cel mai mic multiplu comun :

a) $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ şi $X^3 - 8X^2 + 19X - 12$; b) $X^4 - 1$ şi $X^6 - 1$.

7. FUNCŢII POLINOMIALE ŞI ECUAŢII POLINOMIALE. TEOREMA LUI BÉZOUT

Am întîlnit în lecţiile anterioare multe exemple de polinoame. Putem scrie acum forma generală a unui polinom în nedeterminata X, de gradul n :

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

sau

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n,$$

unde **coeficienţii** $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ sînt numere reale, iar $a_n \neq 0$.

Să luăm de exemplu polinomul $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 5$. Scriindu-l astfel : $P(X) = 2X^3 + (-3)X^2 + 0X + 5$, recunoaştem coeficienţii :

$$a_3 = 2, a_2 = -3, a_1 = 0, a_0 = 5.$$

Să înlocuim în acest polinom nedeterminata X cu numărul 1 ; obţinem ca rezultat numărul $2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 = 4$; îl notăm $P(1)$. Deci $P(1) = 4$.

Dacă înlocuim nedeterminata X cu numărul $\frac{3}{2}$, obţinem ca rezultat numărul $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 = 5$; îl notăm $P\left(\frac{3}{2}\right)$. Deci $P\left(\frac{3}{2}\right) = 5$. La fel, $P(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 = 9$, $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 5 = 0$.

Înlocuind nedeterminata X cu un număr x, obţinem ca rezultat numărul $2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 5$, care se notează $P(x)$. Putem defini o funcţie $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ prin $h(x) = P(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Aceasta este o funcţie polinomială.

În general, polinomul

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_2X^2 + a_1X + a_0,$$

determină o funcţie polinomială $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită de formula $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Funcţiile liniare, descrise de

$$f(x) = a_1 \cdot x + a_0$$

sînt exemple simple de funcţii polinomiale.

Şi funcţiile pătratice $f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ sînt funcţii polinomiale.

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie polinomială, definită de

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Orice număr r cu proprietatea că $f(r) = 0$ va fi numit **rădăcină** a polinomului $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$. Rădăcinile reale ale acestui polinom sînt tocmai soluţiile ecuaţiei polinomiale

$$a_n \mathbf{x}^n + a_{n-1} \mathbf{x}^{n-1} + \ldots + a_2 \mathbf{x}^2 + a_1 \mathbf{x} + a_0 = 0, \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}.$$

Dacă $a_n \neq 0$, se spune că aceasta este o ecuaţie **de gradul al** n**-lea**.

De exemplu, numărul -1 este rădăcină a polinomului $2X^3 - 3X^2 + 5$, aşa cum am văzut. Putem spune că -1 este soluţie a ecuaţiei polinomiale de gradul al III-lea

$$2\mathbf{x}^3 - 3\mathbf{x}^2 + 5 = 0, \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}.$$

Am văzut că ecuaţiile de gradul I :

$$a_1 \mathbf{x} + a_0 = 0, \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}$$

(cu $a_1 \neq 0$) au o singură soluţie, numărul $-\frac{a_0}{a_1}$. Deci polinomul de gradul I $a_1 X + a_0$ are o singură rădăcină. Polinomul de gradul al II-lea $X^2 + 1$ nu are nici o rădăcină reală (de ce?). Se poate arăta că polinomul de gradul al III-lea $2X^3 - 3X^2 + 5$ are ca rădăcină reală doar pe -1.

Polinoamele, în special sub formă de funcţii polinomiale, apar în multe probleme ridicate de fizică, chimie, tehnică. De multe ori interesează aflarea rădăcinilor polinoamelor. În acest scop se foloseşte mult următoarea teoremă, datorată lui Bézout* :

Teoremă. Numărul r este rădăcină a polinomului $P(X)$ dacă şi numai dacă binomul $X - r$ îl divide pe $P(X)$.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Arătaţi că polinomul $X^{n+1} - nX^n + (n - 1)$ se divide cu $X - 1$, oricare ar fi numărul natural n.

Într-adevăr, înlocuind nedeterminata X cu 1, obţinem $1^{n+1} - n \cdot 1^n + (n - 1) = 0$; deci 1 este rădăcină a polinomului.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Care polinom $P(X)$ de gradul al II-lea are valorile $P(-2) = 3$, $P(-1) = 6$, $P\left(\frac{1}{2}\right) = 3$?

Fiind un polinom de gradul al II-lea, îl vom scrie

$$P(X) = aX^2 + bX + c, \text{ cu } a \neq 0.$$

---

* *Bézout*, Étienne — matematician francez (1730—1783).

A găsi polinomul ce satisface condiţiile date înseamnă a preciza valorile coeficienţilor a, b şi c.

Condiţia $P(-2)=3$ se scrie $a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c=3$. La fel, celelalte condiţii se scriu :

$$a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=6$$

şi

$$a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+c=3.$$

Coeficienţii a, b şi c formează soluţia sistemului de ecuaţii. Rezolvîndu-l, obţinem $a=-2$, $b=-3$, $c=5$.

EXERCIŢII

1) Fie polinomul $P(X)=2X^4-X^3+3X^2-5X+1$.

a) Calculaţi valorile $P(-3)$, $P(-2)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$.

b) Calculaţi $P\left(-\frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{3}{2}\right)$.

c) Aproximaţi (cu eroare de cel mult 0,01) valorile $P(-\sqrt{2})$, $P(\sqrt{2})$, $P(\sqrt{3})$.

2) În împărţirea $(2X^5-5X+a):(X-2)$, determinaţi coeficientul a în aşa fel încît restul să fie 0.

3) Care dintre numerele $-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$ este rădăcină a polinomului : a) X^3+4X^2+4X+3; b) $4X^2+12X+9$; c) $2X^5-X^4-2X^3-2X^2-4X-1$; d) $2X^6-X^5-5X^3-5X^2-X$?

4) Aflaţi polinomul de gradul al doilea $P(X)=a_2X^2+a_1X+a_0$ ştiind că :

a) $P(-3)=-39$, $P(0)=0$, $P(3)=-33$. b) $P(-1)=0$, $P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$, $P(1)=0$; c) $P(-2)=-3$, $P(-1)=-4$, $P(1)=12$.

Fie polinomul în nedeterminatele X şi Y :

$$P(X, Y)=2X^2+XY+5Y+1.$$

Înlocuind nedeterminata X cu numărul 3, iar nedeterminata Y cu numărul -4, obţinem ca rezultat numărul $2\cdot3^2+3\cdot(-4)+5\cdot(-4)+1=-13$, pe care îl notăm $P(3, -4)$. Deci $P(3, -4)=-13$.

Înlocuind nedeterminata X cu un număr x, iar pe Y cu numărul y, obţinem numărul $2\cdot x^2+x\cdot y+5\cdot y+1$, care va fi notat $P(x, y)$. Acest număr este numit **valoarea** polinomului P în (x, y).

Aşadar, $P(1,1)=2\cdot1^2+1\cdot1+5\cdot1+1=9$; $P\left(\frac{1}{2}, 1\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot1+5\cdot1+1=\frac{17}{2}$; $P(-4, 3)=2\cdot(-4)^2+(-4)\cdot3+5\cdot3+1=36$; $P(\sqrt{2}, 3)=2\cdot(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}\cdot3+5\cdot3+1=20+3\sqrt{2}$.

EXERCIȚII

1) Aflați valoarea polinomului $Q(X, Y) = 2X - Y^2 + 2$ în :
a) (1, 1); b) (1, 2); c) (−1, 1); d) (1, −2); e) (3, 2); f) $(4, 2\sqrt{2})$; g) $(-2, \sqrt{3})$.

2) Pentru polinomul $P(X, Y) = 5X^2 - XY^2 + Y^3 + X$, calculați :
a) $P(x, 2)$; b) $P(x, -1)$; c) $P(1, y)$; d) $P(-2, y)$.

3) Fie polinomul $P(X, Y) = X^2 - 3XY + 2Y - X + 3$. Pentru ce număr y avem $P(3, y) = 0$? Dar $P(3, y) = 9$?

8. FRACȚII RAȚIONALE. AMPLIFICAREA ȘI SIMPLIFICAREA

O **fracție rațională** este o pereche de polinoame P și Q, scrisă astfel : $\frac{P}{Q}$. Numitorul Q trebuie să fie diferit de polinomul nul 0.

De exemplu, $\frac{2X+1}{3X^2+1}$, $\frac{X^2}{X}$, $\frac{2X+1}{4}$, $\frac{4X^2-4X+1}{(3X-1)^2}$ sînt fracții raționale în nedeterminata X, iar $\frac{2X+Y}{X+2Y}$, $\frac{X+1}{Y+1}$, $\frac{Y^2}{X}$, $\frac{X+Y^3}{1}$ sînt fracții raționale în nedeterminatele X și Y.

Fracțiile raționale ale căror numitori sînt constante $\neq 0$ sînt de fapt polinoame. De exemplu, fracția $\frac{2X^2+1}{1}$ se identifică cu polinomul $2X^2 + 1$; fracția $\frac{X^2+2}{2}$ se identifică cu polinomul $\frac{1}{2}X^2 + 1$; fracția $\frac{2X+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ se identifică cu polinomul $\frac{2}{\sqrt{2}}X + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}X + \sqrt{3}$.

Putem amplifica o fracție rațională $\frac{P}{Q}$ cu orice polinom $R \neq 0$; ca rezultat obținem fracția rațională $\frac{R \cdot P}{R \cdot Q}$. De exemplu, amplificînd fracția rațională $\frac{2X+1}{3X^2+1}$ cu polinomul $X^2 + X$, obținem ca rezultat fracția rațională $\frac{(X^2+X)(2X+1)}{(X^2+X)(3X^2+1)} = \frac{2X^3+3X^2+X}{3X^4+3X^3+X^2+X}$.

Pentru a simplifica o fracție rațională $\frac{P}{Q}$ cu un polinom $R \neq 0$, este necesar ca atît numărătorul P cît și numitorul Q să fie divizibile prin R.

De exemplu, fracția rațională $\frac{2X^2+X}{3X^3+X}$ poate fi simplificată cu

polinomul X ; ca rezultat obţinem fracţia $\frac{2X+1}{3X^2+1}$; fracţia $\frac{2X^3+3X^2+X}{3X^4+3X^3+X^2+X}$ poate fi simplificată cu X, cu $X+1$ sau cu X^2+X. Obţinem pe rînd : $\frac{2X^2+3X+1}{3X^3+3X^2+X+1}$, $\frac{2X^2+X}{3X^3+X}$, respectiv $\frac{2X+1}{3X^2+1}$. Primele două fracţii obţinute mai pot fi simplificate : prima cu $X+1$, a doua cu X ; ca rezultat obţinem cea de-a treia fracţie. Aceasta nu mai poate fi simplificată cu polinoame de grad ≥ 1 ; spunem că ea este *ireductibilă*.

Alt exemplu : fracţia $\frac{2X^2+X}{4X+2}$ poate fi simplificată cu polinomul $2X+1$; ca rezultat obţinem *polinomul* $\frac{1}{2}X$.

EXERCIŢII

1) Simplificaţi fracţiile raţionale :

a) $\frac{2X^3}{3X^4}$; b) $\frac{4X^2Y^3}{6X^4Y^3}$; c) $\frac{8a^2XY^2}{12aX^2Y}$; d) $\frac{5X^2-6X}{5X}$; e) $\frac{XY-X}{XY+X}$.

2) Simplificaţi :

a) $\frac{9X^2+9X}{4X+4}$; b) $\frac{X^2+2X+1}{X^2-1}$; c) $\frac{X^2-1}{(X-1)^2}$; d) $\frac{X^2-25}{X^2-10X+25}$; e) $\frac{7X^4-7}{2X^2+2}$; f) $\frac{X^3+8}{X^2+X}$; g) $\frac{X^3+X^2+X}{X^3-1}$

3) Simplificaţi :

a) $\frac{3X^2-3XY}{9XY-9Y^2}$; b) $\frac{X^2-16Y^2}{X^2+8XY+16Y^2}$; c) $\frac{X^3-Y^3}{2X-2Y}$; d) $\frac{X^3-125Y^3}{X^2-10XY+25Y^2}$.

4*) Simplificaţi :

a) $\frac{X^3-6X^2+11X-6}{X^2-3X+2}$; b) $\frac{X^2-Y^2-2YZ-Z^2}{Y^2-X^2-2XZ-Z^2}$; c) $\frac{9X^4-9XY^3}{X^3+X^2Y+XY^2-\frac{1}{2}(X^3-Y^3)}$.

5) Amplificaţi cu X, apoi cu $X-1$ fracţiile :

a) $\frac{X}{X+1}$; b) $\frac{X-1}{X}$; c) $\frac{X^2+X+1}{X+1}$; d) $\frac{X+1}{X^2+1}$.

6) Amplificaţi fracţiile

$$\frac{X+1}{X^2-X} \quad \text{şi} \quad \frac{X-1}{X^2+X}$$

astfel încît să obţineţi fracţii avînd acelaşi numitor.

9. VALORILE UNEI FRACŢII RAŢIONALE FUNCŢII RAŢIONALE

Fie de exemplu fracţia raţională $F(X) = \frac{X-1}{X^2-1}$. Să înlocuim nedeterminata X cu numărul 2 ; obţinem numărul $\frac{2-1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$, care se notează $F(2)$. Deci $F(2) = \frac{1}{3}$. Dacă înlocuim nedeterminata X cu numărul $-\frac{1}{2}$, obţinem ca rezultat numărul $\frac{-\frac{1}{2}-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}-1} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{4}} = 2$; acesta se notează $F\left(-\frac{1}{2}\right)$. Deci $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$. Se spune că fracţia raţională *are valoarea* $\frac{1}{3}$ *în* 2 şi că are valoarea 2 în $-\frac{1}{2}$. De asemenea, $F(0) = \frac{0-1}{0^2-1} = 1$.

Însă, dacă înlocuim nedeterminata X cu -1 (sau cu 1), numitorul fracţiei se anulează. Se spune că fracţia raţională F *nu are definită valoarea în* -1 şi în 1.

În general, dacă într-o fracţie ratională $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ înlocuim nedeterminata X cu un număr real r, pot apărea două cazuri :

Cazul 1 : $Q(r) = 0$. În acest caz spunem că fracţia raţională F **nu are definită valoarea în** r, sau că **nu este definită în** r.

Cazul 2. $Q(r) \neq 0$. În acest caz fracţia raţională F **are valoarea** $\frac{P(r)}{Q(r)}$ în r ; notăm $F(r) = \frac{P(r)}{Q(r)}$.

De exemplu, pentru a calcula efectiv valoarea $F(r)$, unde $F(X) = \frac{8X^2+12X+1}{(X-1)(X-6)}$, vom scrie $F(X) = \frac{1+X\cdot(12+X\cdot 8)}{6+X\cdot(-7+X)}$ şi vom folosi următorul algoritm :

Pasul 0. Citeşte numărul r. Dacă $r \neq 1$ şi $r \neq 6$, continuă cu pasul 1. În caz contrar scrie *„excepţie"*. Stop.

Pasul 1. $a = r \cdot 8$;
Pasul 2. $b = 12 + a$;
Pasul 3. $c = r \cdot b$;
Pasul 4. *numărător* $= 1 + c$;
Pasul 5. $d = -7 + r$;
Pasul 6. $e = r \cdot d$;
Pasul 7. *numitor* $= 6 + e$;
Pasul 8. $F(r) =$ *numărător* : *numitor* ;
Pasul 9. Scrie rezultatul $F(r)$. Stop.

Fie fracţia $\frac{X+1}{X^2-3X+2}$. Numitorul are două rădăcini, anume 1 şi 2. Pentru orice număr real x, diferit de 1 şi de 2, fracţia are valoare în x, şi anume $\frac{x+1}{x^2-3\cdot x+2}$. Putem defini o funcţie $h : \mathbf{R}\setminus\{1, 2\} \to \mathbf{R}$ prin $h(x)=\frac{x+1}{x^2-3x+2}$; aceasta este o *funcţie raţională.*

În general, fie $F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}$ o fracţie raţională. Să notăm cu M mulţimea rădăcinilor reale ale numitorului $Q(X)$. Putem defini o funcţie $f : \mathbf{R}\setminus M \to \mathbf{R}$, prin $f(x) = F(x)$. O astfel de funcţie se numeşte **funcţie raţională.**

Astfel, funcţiile $g : \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$, $g(x)=\frac{3x^2+1}{x-1}$ şi $i : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $i(x)=\frac{1}{x}$ sînt exemple de funcţii raţionale.

Şi funcţia $t : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ descrisă de $t(x)=\frac{1}{x^2+1}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, este o funcţie raţională.

Studierea funcţiilor raţionale va fi făcută în liceu.

EXERCIŢII

1) Calculaţi valoarea fracţiilor raţionale de mai jos în : -1, 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, 2 şi $-\frac{5}{3}$:

a) $\frac{X+4}{X+6}$; b) $\frac{2X+1}{X-3}$; c) $\frac{3X^2-2}{X^2-3X}$; d) $\frac{2X^2-5X+3}{X^3+2X+2}$; e) $\frac{3X^2-5X+2}{X^2-6X+9}$

2) Pentru ce numere a, fracţia raţională :

a) $\frac{2X-3}{X-1}$; b) $\frac{5}{2X+1}$; c) $\frac{4X-3}{X+2}$; d) $\frac{3X-17}{3X+15}$; e) $\frac{12X-4}{6X}$ nu are definită valoarea în a ?

3) Scrieţi algoritmul pentru calculul valorii $F(r)$, dacă $F(X)$ este fracţia raţională :

a) $\frac{X+1}{X-2}$; b) $\frac{X^2-2X+2}{3X+4}$; c) $\frac{5X^2-4X+3}{X^2+1}$.

10. OPERAŢII CU FRACŢII RAŢIONALE

Priviţi circuitul electric desenat în figura 1 : doi rezistori, avînd aceeaşi rezistenţă R, au fost legaţi în paralel cu rezistori de 1 kΩ respectiv 2 kΩ, iar cele două celule obţinute au fost legate în serie. Care este rezistenţa totală a circuitului ?

Cunoscînd formulele de calcul ale rezistenţelor, vom putea afla rezistenţa primei celule : $\frac{R}{R+1}$ kΩ (am presupus că şi rezistenţa R este exprimată în ki-

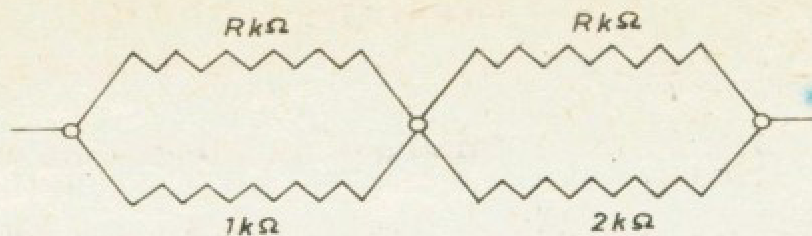


Fig. III.1

loohmi). Rezistenţa celei de-a doua celule este $\frac{2R}{R+2}$ kΩ. Deci rezistenţa totală a circuitului este de $\frac{R}{R+1} + \frac{2R}{R+2}$. Aducînd la acelaşi numitor, putem să scriem :

$$\frac{R}{R+1} + \frac{2R}{R+2} = \frac{R^2+2R}{(R+2)(R+1)} + \frac{2R^2+2R}{(R+1)(R+2)} =$$

$$= \frac{(R^2+2R)+(2R^2+2R)}{(R+1)(R+2)} = \frac{3R^2+4R}{R^2+3R+2}.$$

Avem un exemplu de adunare a două fracţii raţionale (în nedeterminata R).

În fracţiile raţionale nedeterminatele reprezintă de obicei numere reale ; chiar şi fracţiile reprezintă numere reale ; de aceea este natural să definim operaţii cu fracţii raţionale, care să extindă operaţiile cu numere : adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea.

De exemplu, pentru a aduna fracţiile raţionale $\frac{2X-1}{X}$ şi $\frac{5X-2}{X}$, avînd în vedere că au acelaşi numitor, vom proceda astfel :

$$\frac{2X-1}{X} + \frac{5X-2}{X} = \frac{(2X-1)+(5X-2)}{X} = \frac{7X-3}{X}.$$

La fel,

$$\frac{3}{X-1} + \frac{4X+1}{X-1} = \frac{3+(4X+1)}{X-1} = \frac{4X+4}{X-1};$$

$$\frac{3X+Y}{X+Y} + \frac{X+2Y}{X+Y} = \frac{(3X+Y)+(X+2Y)}{X+Y} = \frac{4X+3Y}{X+Y};$$

$$\frac{X-2}{X^2-1} + \frac{X}{X^2-1} = \frac{(X-2)+X}{X^2-1} = \frac{2X-2}{X^2-1}.$$

Să observăm că putem simplifica ultima fracţie cu $X - 1$: ca rezultat obţinem $\frac{2}{X+1}$. Aşadar, putem spune că suma fracţiilor $\frac{X-2}{X^2-1}$ şi $\frac{X}{X^2-1}$, după simplificare, este $\frac{2}{X+1}$. Se obişnuieşte să se scrie :

$$\frac{X-2}{X^2-1} + \frac{X}{X^2-1} = \frac{2}{X+1}.$$

EXERCIŢII

1) Adunaţi fracţiile raţionale:

a) $\frac{1}{X+1}$ şi $\frac{5}{X+1}$; b) $\frac{X+2}{X^2+X}$ şi $\frac{X-1}{X^2+X}$; c) $\frac{5X-4}{11}$ şi $\frac{3X+2}{11}$;
d) $\frac{X+2Y^2}{X^2Y}$ şi $\frac{2X-Y^2}{X^2Y}$; e) $\frac{X-3}{X^2-2X}$ şi $\frac{X-1}{X^2-2X}$; f) $\frac{X-Y^2}{X^2Y^2}$ şi $\frac{2X+Y^2}{X^2Y^2}$.

2) Efectuaţi adunările, simplificînd rezultatele:

a) $\frac{5X}{X+2}+\frac{10}{X+2}$; b) $\frac{X^3}{X^2+X}+\frac{1}{X^2+X}$; c) $\frac{2X+3}{(X-1)(X+3)}+$
$+\frac{3}{(X-1)(X+3)}$; d) $\frac{X^2}{X^3+1}+\frac{1-X}{X^3+1}$; e) $\frac{X^2+1}{X^3-1}+\frac{X}{X^3-1}$.

În general, dacă $\frac{P}{Q}$ şi $\frac{R}{Q}$ sînt două fracţii raţionale cu acelaşi numitor, definim suma lor astfel: $\frac{P}{Q}+\frac{R}{Q}=\frac{P+R}{Q}$.

Pentru a aduna două fracţii raţionale cu numitorii diferiţi, le vom aduce mai întîi la acelaşi numitor, prin amplificare convenabilă, apoi le vom aplica regula de mai sus.

De exemplu, fie fracţiile $\frac{X^2}{X-1}$ şi $\frac{1}{X}$. Pentru a le aduna, le vom aduce mai întîi la acelaşi numitor, amplificîndu-le cu X, respectiv cu $X-1$:

$$^{X)}\frac{X^2}{X-1}+{}^{X-1)}\frac{1}{X}=\frac{X^3}{X(X-1)}+\frac{X-1}{X(X-1)}=\frac{X^3+(X-1)}{X(X-1)}=\frac{X^3+X-1}{X^2-X}$$

Alt exemplu. Pentru a aduna fracţiile $\frac{X}{(X-1)^2}$ şi $\frac{3}{X^2-1}$, să observăm că cel mai mic multiplu comun al numitorilor lor este $(X-1)^2(X+1)$. Aşadar, pentru a le aduce la acelaşi numitor, le vom amplifica cu $X+1$, respectiv cu $X-1$:

$$^{X+1)}\frac{X}{(X-1)^2}+{}^{X-1)}\frac{3}{X^2-1}=\frac{X^2+X}{(X+1)(X-1)^2}+\frac{3X-3}{(X-1)(X^2-1)}=$$

$$=\frac{X^2+4X-3}{(X-1)^2(X+1)}=\frac{X^2+4X-3}{X^3-X^2+X-1}$$

Să adunăm fracţiile $\frac{X}{X+1}$ şi $\frac{1}{X-1}$. Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este produsul lor: $(X+1)(X-1)=X^2-1$. Vom proceda astfel:

$$^{X-1)}\frac{X}{X+1}+{}^{X+1)}\frac{1}{X-1}=\frac{X^2-X}{X^2-1}+\frac{X+1}{X^2-1}=$$

$$=\frac{(X^2-X)+(X+1)}{X^2-1}=\frac{X^2+1}{X^2-1}.$$

Să adunăm polinomul $2X + 5$ cu fracţia raţională $\frac{3X^2}{X-1}$. Polinomul poate fi scris ca fracţie raţională cu numitorul 1: $\frac{2X+5}{1}$. Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este chiar numitorul fracţiei $\frac{3X^2}{X-1}$. Vom proceda astfel:

$$^{X-1)}(2X+5) + \frac{3X^2}{X-1} = \frac{(X-1)(2X+5)+3X^2}{X-1} = \frac{5X^2+3X-5}{X-1}.$$

De regulă, rezultatul adunării a două fracţii raţionale trebuie simplificat pe cît posibil. Preferăm, din motive evidente, scrierea lui sub forma unei fracţii ireductibile (însă aceasta este, în general, dificil de realizat).

Astfel, să luăm ca exemplu fracţiile raţionale $\frac{X+2}{X^2+X}$ şi $\frac{1}{X+1}$. Adunîndu-le, obţinem :

$$\frac{X+2}{X^2+X} + {}^{X)}\frac{1}{X+1} = \frac{(X+2)+X}{X(X+1)} = \frac{2X+2}{X(X+1)}.$$

Rezultatul obţinut poate fi simplificat cu $X + 1$; se obişnuieşte să se scrie ;

$$\frac{X+2}{X^2+X} + \frac{1}{X+1} = \frac{2}{X}.$$

Alt exemplu. Să luăm fracţiile raţionale

$$\frac{X^3-3X^2+2X}{X^5-X^2} \quad \text{şi} \quad \frac{3X+1}{X^4+X^3+X^2}.$$

Adunîndu-le (observînd că cel mai mic multiplu comun al numitorilor este $X^5 - X^2 = X^2(X-1)(X^2+X+1)$), obţinem :

$$\frac{X^3-3X^2+2X}{X^5-X^2} + {}^{X-1)}\frac{3X+1}{X^4+X^3+X^2} =$$

$$= \frac{(X^3-3X^2+2X)+(3X^2-2X-1)}{X^5-X^2} = \frac{X^3-1}{X^5-X^2}.$$

Putem simplifica rezultatul obţinut cu $X^3 - 1$; vom scrie :

$$\frac{X^3-3X^2+2X}{X^5-X^2} + \frac{3X+1}{X^4+X^3+X^2} = \frac{1}{X^2}.$$

Observaţie. Am fi putut evita o serie de calcule dacă am fi observat de la început că fracţia $\frac{X^3-3X^2+2X}{X^5-X^2}$ poate fi simplificată cu $X - 1$ şi înlocuită cu $\frac{X^2-2X}{X^4+X^3+X^2}$. De aceea, atunci cînd adunăm fracţii raţionale, este bine să verificăm înainte de toate dacă ele sînt sau nu ireductibile, eventual să le simplificăm.

Alte exemple. Să efectuăm : $\frac{5}{3X} + \frac{2X}{X^2+1}$ şi $\frac{X}{1-X^2} + \frac{1}{X+1}$.

Avem :

$$ {}^{X^2+1)}\frac{5}{3X} + {}^{3X)}\frac{2X}{X^2+1} = \frac{5X^2+5}{(X^2+1)\cdot 3X} + \frac{6X^2}{3X(X^2+1)} = \frac{11X^2+5}{3X^3+3X} ; $$

$$ {}^{X+1)}\frac{X}{1-X^2} + {}^{1-X^2)}\frac{1}{X+1} = \frac{(X^2+X)+(1-X^2)}{(1-X^2)(X+1)} = $$

$$ = \frac{X+1}{(1-X^2)(X+1)} {}^{(X+1} = \frac{1}{1-X^2} , $$

sau, observînd că cel mai mic multiplu comun al numitorilor $1 - X^2$ şi $X + 1$ este $1 - X^2 = (X+1)(1-X)$:

$$ \frac{X}{1-X^2} + {}^{1-X)}\frac{1}{X+1} = \frac{X+(1-X)}{1-X^2} = \frac{1}{1-X^2} . $$

În general, dacă $\frac{P}{Q}$ şi $\frac{R}{S}$ sînt două fracţii raţionale cu numitorii diferiţi, atunci suma lor este fracţia raţională

$$ \frac{S\cdot P + Q\cdot R}{Q\cdot S} . $$

Adunarea fracţiilor raţionale are aceleaşi proprietăţi ca şi adunarea numerelor reale : este comutativă şi asociativă. Putem astfel să adunăm trei sau mai multe fracţii raţionale, indiferent în ce ordine.

EXERCIŢIU REZOLVAT

Să adunăm fracţiile raţionale $\frac{X+1}{X-1}$, $\frac{X-1}{X+1}$ şi $\frac{7X^2-18X+7}{X^2-1}$.

Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este $X^2 - 1 = (X+1)\cdot(X-1)$. Pentru a aduce toate cele trei fracţii la acelaşi numitor, vom amplifica prima cu $X + 1$, iar a doua cu $X - 1$. Obţinem astfel :

$$ {}^{X+1)}\frac{X+1}{X-1} + {}^{X-1)}\frac{X-1}{X+1} + \frac{7X^2-18X+7}{X^2-1} = $$

$$ = \frac{(X^2+2X+1)+(X^2-2X+1)+(7X^2-18X+7)}{X^2-1} = $$

$$ = \frac{9X^2-18X+9}{X^2-1} = \frac{9(X-1)^2}{X^2-1} {}^{(X-1} = \frac{9X-9}{X+1} . $$

EXERCIȚIU REZOLVAT

Să adunăm fracțiile raționale $\frac{3X^2+Y^2}{X^2+2XY+Y^2}$ și $\frac{-2X}{X+Y}$.

Pentru a aduce fracțiile la același numitor, va trebui să amplificăm a doua cu $X+Y$. Deci :

$$\frac{3X^2+Y^2}{X^2+2XY+Y^2} + {}^{X+Y)}\frac{-2X}{X+Y} = \frac{3X^2+Y^2-2X^2-2XY}{(X+Y)^2} =$$

$$= \frac{(X-Y)^2}{(X+Y)^2} = \left(\frac{X-Y}{X+Y}\right)^2.$$

De ce credeți că am scris rezultatul ca pătrat și nu astfel :

$$\frac{X^2-2XY+Y^2}{X^2+2XY+Y^2}?$$

EXERCIȚII

1) Aduceți la același numitor fracțiile, simplificîndu-le în prealabil :

a) $\frac{2X^2+3X}{X(X+7)}$ și $\frac{4X+4}{X^2-1}$; b) $\frac{X+6}{9X^2+12X+4}$ și $\frac{4-6X}{9X^2-4}$; c) $\frac{X+3}{X^3-9X}$ și $\frac{2X^2-6X}{X^2-6X+9}$.

2) Efectuați adunările :

a) $\frac{5X+2}{2X}+\frac{-2X+1}{4}$; b) $\frac{X+1}{X^2}+\frac{X-1}{X}$; c) $\frac{X-1}{X+1}+\frac{1}{X}$; d) $\frac{X}{2}+\frac{X}{X-1}$; e) $\frac{X-1}{X+2}+\frac{X+1}{X-2}$; f) $\frac{1}{X+1}+\frac{1}{X-1}$; g) $\frac{2X-5}{2-5X}+\frac{2X+5}{2+5X}$; h) $\frac{4X-3}{4X+3}+$ $+\frac{3X+4}{3X-4}$.

3) Efectuați adunările :

a) $\frac{1}{X+Y}+\frac{1}{X-Y}$; b) $\frac{2X}{X+2Y}+\frac{2Y}{X-2Y}$; c) $\frac{Y}{X+2Y}+\frac{4X}{2X+Y}$; d) $\frac{X+Y}{X^2-XY}+\frac{X-Y}{XY+Y^2}$.

4) Efectuați adunările, simplificînd (dacă este posibil) rezultatul :

a) $\frac{1}{X}+\frac{2}{X-1}+\frac{3X+1}{1-X^2}$; b) $\frac{2X+3}{X-2}+\frac{2-3X}{X+2}+\frac{X^2-16X}{X^2-4}$; c) $\frac{X+Y}{2X-2Y}+\frac{Y-X}{2X+2Y}+\frac{2Y^2}{X^2-Y^2}$; d) $\frac{1}{X-2}+\frac{2}{(X-2)^2}+\frac{1}{(X-2)^3}$; e) $\frac{4}{(X-2)(X-3)}+\frac{3}{(X-1)(X-2)}$; f) $\frac{2}{X^2-Y^2}+\frac{1}{(X+Y)^2}+\frac{1}{(X-Y)^2}$;

g) $\frac{X+Y}{(Y-Z)(Z-X)}+\frac{Y+Z}{(Z-X)(X-Y)}+\frac{X+Z}{(X-Y)(X-Z)}$; h) $\frac{YZ}{(X+Y)(X+Z)}+$
$+\frac{XZ}{(Y+X)(Y+Z)}+\frac{XY}{(Z+X)(Z+Y)}$; i) $\frac{1}{X-3}+\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}+\frac{1}{X+3}$.

5) Efectuaţi adunările :

a) $1+\frac{1}{X-1}$; b) $1+X+\frac{X^2}{1-X}$; c) $1+X+X^2+\frac{X^3}{1-X}$; d) $X+\frac{2X}{X-1}$.

6*) Fie fracţiile :

$$F(X)=\frac{2X-1}{X^2-2X};\ G(X)=\frac{3X-2}{X^2+2X};\ H(X)=\frac{4X-3}{X^2-4}.$$

Calculaţi $U(X)=F(X)+G(X)$; $V(X)=2G(X)+H(X)$; $W(X)=F(X)+3G(X)+2H(X)$.

7*) Efectuaţi adunările :

a) $\frac{X+1}{X^2-3X+2}+\frac{X+2}{X^2-4X+3}$; b) $\frac{X^2-4}{X^2+4X+3}+\frac{X^2-9}{X^2+6X+8}$.

Opusa fracţiei raţionale $F(X)=\frac{P(X)}{Q(X)}$ este fracţia raţională $\frac{-P(X)}{Q(X)}$, care se notează $-F$. **Scăderea** fracţiilor raţionale se defineşte cu ajutorul adunării, prin :

$$G-F=G+(-F).$$

De exemplu, dacă vrem să scădem fracţia raţională $\frac{3X-4}{X^2-1}$ din fracţia $\frac{7}{X+1}$, vom proceda astfel :

$$\frac{7}{X+1}-\frac{3X-4}{X^2-1}=\frac{7}{X+1}+\frac{-3X+4}{X^2-1}=$$
$$=\frac{7(X-1)+(-3X+4)}{X^2-1}=\frac{4X-3}{X^2-1}.$$

Practic vom proceda ca şi în cazul adunării :

$$\overset{X-1)}{\frac{7}{X+1}}-\frac{3X-4}{X^2-1}=\frac{7(X-1)-(3X-4)}{X^2-1}.$$

Observaţie. Să observăm că opusa fracţiei $\frac{-P}{Q}$ este fracţia $\frac{P}{Q}$: $-\frac{-P}{Q}=\frac{P}{Q}$. De asemenea, să observăm că prin amplificarea fracţiei $\frac{-P}{Q}$ cu -1 obţinem fracţia $\frac{P}{-Q}$.

EXERCIŢII

1) Efectuaţi :

a) $\frac{1}{X}-\frac{4}{3X+2}$; b) $\frac{5X}{X+2}-\frac{2X}{X-1}$; c) $\frac{2X-1}{X+3}-\frac{-2X}{X-2}$; d) $\frac{3}{X^2-1}-$

$$-\frac{2X}{X^2+2X+1};\quad e)\ \frac{3X+7}{X^2-3X}-\frac{X+2}{X^2-9};\quad f)\ \frac{1}{(X-2)^3}-\frac{X}{(X-2)^4}$$

2) Efectuaţi, simplificînd pe cît posibil rezultatul :

a) $\frac{1}{X}+\frac{2}{X-1}-\frac{3X+1}{X^2-1}$; b) $\frac{3+2X}{X-2}-\frac{3X-2}{X+2}+\frac{X^2-16X}{X^2-4}$; c) $\frac{3}{2X-1}+$ $+\frac{7}{2X+1}-\frac{20X-4}{4X^2-1}$; d) $\frac{2}{X^2+3}+\frac{1}{X+1}-\frac{8}{(1-X^2)(X^2+3)}$; e) $\frac{X^2}{X^3+1}-$ $-\frac{2X}{X^2-X+1}+\frac{3}{X+1}$.

3) Fie fracţiile raţionale $F(X)=\frac{2X-1}{X^2-2X}$, $G(X)=\frac{3X-2}{X^2-2X}$ şi $H(X)=\frac{4X-3}{X^2-4}$. Calculaţi fracţiile raţionale $U(X)=F(X)+G(X)-H(X)$; $V(X)=F(X)-G(X)$; $W(X)=$ $=H(X)-F(X)$. Calculaţi apoi fracţia $E(X)=U(X)+V(X)+W(X)$. Ce observaţi ? Puteţi explica ?

4) Efectuaţi :

a) $\frac{X}{X+Y}+\frac{X}{X-Y}-\frac{2XY}{X^2-Y^2}$; b) $\frac{3X}{(X-2Y)^2}+\frac{2X+Y}{(X+Y)(X-2Y)}-\frac{5}{X+Y}$;

c) $\frac{X+Y}{X-Y}+\frac{X^2+Y^2}{X^2-Y^2}-\frac{X-Y}{X+Y}$; d) $\frac{X+Y}{(X+2Y)(2X+3X)}-\frac{13X+36Y}{(X+2Y)(3X-4Y)}$;

e) $\frac{(X+Y)^2}{XY}+\frac{(Y+Z)^2}{YZ}+\frac{(X+Z)^2}{XZ}-4$.

Produsul a două fracţii raţionale $\frac{P}{Q}$ şi $\frac{R}{S}$ este, prin definiţie, fracţia raţională $\frac{P\cdot R}{Q\cdot S}$:

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}=\frac{P\cdot R}{Q\cdot S}$$

Observăm că numărătorul produsului este produsul numărătorilor, iar numitorul produsului este produsul numitorilor fracţiilor.

De exemplu, să calculăm produsul fracţiilor $\frac{X^2-4}{X^2}$ şi $\frac{2X}{X+2}$:

$$\frac{X^2-4}{X^2}\cdot\frac{2X}{X+2}=\frac{(X^2-4)\cdot 2X}{X^2(X+2)}=\frac{2X^3-8X}{X^3+2X^2}$$

Se obişnuieşte să se simplifice (pe cît posibil) rezultatul ; în acest exemplu putem simplifica cu $X(X+2)=X^2+2X$ şi putem scrie :

$$\frac{X^2-4}{X^2}\cdot\frac{2X}{X+2}=\frac{2X-4}{X}.$$

Simplificarea poate fi făcută chiar de la început, după ce am descompus în factori numărătorii şi numitorii. Orice factor care apare într-unul dintre numărători şi într-unul dintre numitori poate fi simplificat.

Luînd din nou exemplul de mai sus, să descompunem numărătorii şi numitorii în factori :

$$\frac{X^2-4}{X^2}\cdot\frac{2X}{X+2}=\frac{(X+2)(X-2)}{X^2}\cdot\frac{2X}{X+2}.$$

Observăm că X apare ca factor la numitor şi la numărător ; la fel $X+2$. Îi simplificăm ; rămîne $\frac{X-2}{X}\cdot\frac{2}{1}$, adică $\frac{2X-4}{X}$.

Pentru a efectua produsul fracţiilor raţionale $\frac{X-2}{X}$ şi $\frac{X^2}{X+1}$, observăm că X poate fi simplificat :

$$\frac{X-2}{X}\cdot\frac{X^2}{X+1}=\frac{X-2}{1}\cdot\frac{X}{X+1}=\frac{X^2-2X}{X+1}$$

Alt exemplu. Să înmulţim fracţia $\frac{X^3-1}{X^2+2X+1}$ cu fracţia $\frac{X+1}{X^2-X}$. Descompunem în factori numitorii şi numărătorii ; cele două fracţii se scriu :

$$\frac{(X-1)(X^2+X+1)}{(X+1)^2}\quad\text{şi}\quad\frac{X+1}{X(X-1)}.$$

Observăm că $X-1$ şi $X+1$ apar ca factori la un numărător şi la un numitor ; îi simplificăm şi scriem :

$$\frac{X^3-1}{X^2+2X+1}\cdot\frac{X+1}{X^2-X}=\frac{(X-1)(X^2+X+1)}{(X+1)^2}\cdot\frac{X+1}{X(X-1)}=$$

$$=\frac{X^2+X+1}{X+1}\cdot\frac{1}{X}=\frac{X^2+X+1}{X^2+X}.$$

Să înmulţim polinomul X^2-2X+1 cu fracţia $\frac{X+1}{X^2-X}$. Vom scrie polinomul ca fracţie raţională cu numitorul 1 : $\frac{X^2-2X+1}{1}$. Observăm că putem simplifica factorul $X-1$:

$$\frac{X^2-2X+1}{1}\cdot\frac{X+1}{X^2-X}=\frac{X-1}{1}\cdot\frac{X+1}{X}=\frac{X^2-1}{X}.$$

Să efectuăm produsul fracţiilor raţionale $\frac{X}{X^2-Y^2}$, $\frac{X+2}{XY}$ şi $\frac{X-Y}{X}$. Observăm că putem simplifica factorii $X-Y$ şi X (o singură dată !). Aşadar :

$$\frac{X}{X^2-Y^2}\cdot\frac{X+2}{XY}\cdot\frac{X-Y}{X}=\frac{1}{X+Y}\cdot\frac{X+2}{Y}\cdot\frac{1}{X}=\frac{1\cdot(X+2)\cdot 1}{(X+Y)\cdot Y\cdot X}=$$

$$=\frac{X+2}{X^2Y+XY^2}$$

Inversa fracției raționale $\frac{R}{S}$ este fracția rațională $\frac{S}{R}$ (presupunînd că polinomul R este diferit de polinomul 0). Într-adevăr, după simplificarea cu $R \cdot S$, avem : $\frac{R}{S} \cdot \frac{S}{R} = \frac{R \cdot S}{S \cdot R} = \frac{1}{1} = 1$.

Împărțirea fracțiilor raționale se definește cu ajutorul înmulțirii, astfel:

$$\frac{P}{Q} : \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{R}.$$

Cîtul unei fracții raționale prin alta se obține înmulțind prima fracție cu inversa celei de-a doua.

Rețineți și formula :

$$\frac{\frac{P}{Q}}{\frac{R}{S}} = \frac{P \cdot S}{Q \cdot R}.$$

De exemplu, să împărțim fracția rațională $\frac{X^2 - 2X}{X + 1}$ la fracția $\frac{X - 2}{X}$. Procedăm astfel :

$$\frac{X^2 - 2X}{X + 1} : \frac{X - 2}{X} = \frac{X^2 - 2X}{X + 1} \cdot \frac{X}{X - 2} = \frac{X}{X + 1} \cdot \frac{X}{1} = \frac{X^2}{X + 1}$$

(am simplificat cu $X - 2$).

Să scriem cîtul $\frac{\frac{(X + 3)(2X + 1)}{9X^2 - 4}}{\frac{X + 3}{3X + 2}}$ ca fracție rațională. Folosind formula, îl putem înlocui cu $\frac{(X + 3)(2X + 1) \cdot (3X + 2)}{(9X^2 - 4) \cdot (X + 3)}$. Simplificînd cu $X + 3$ și cu $3X + 2$, obținem $\frac{2X + 1}{3X - 2}$. Putem scrie :

$$\frac{\frac{(X + 3)(2X + 1)}{9X^2 - 4}}{\frac{X + 3}{3X + 2}} = \frac{2X + 1}{3X - 2}.$$

EXERCIȚII

1) Efectuați înmulțirile de mai jos, scriind mai întîi polinoamele ca fracții cu numitorul 1 :

a) $X^2 \cdot \frac{3}{X}$; b) $(X^2 - 2X + 1) \cdot \frac{5}{X - 1}$; c) $X^2 \cdot \frac{2}{X^3}$; d) $(X^2 + 4X + 4) \cdot \frac{1}{X^2 - 4}$.

2) Efectuați :

a) $\frac{2}{X-3}\cdot\frac{X^2-9}{8X}$; b) $\frac{3}{X^2-1}\cdot\frac{X+1}{6X}$; c) $\frac{X^2-4}{X^2+4}\cdot\frac{4X}{X+2}$.

3) Efectuați înmulțirile :

a) $\frac{3X^3Y}{Z^2}\cdot\frac{5Z}{6XY^2}$; b) $\frac{3X}{X-Y}\cdot\frac{X^2-Y^2}{6Y}$; c) $\frac{X+1}{Y}\cdot\frac{4Y^2}{X^2-1}$; d) $\frac{3(X^2-Y^2)}{5XY}\cdot\frac{10Y}{9(X+Y)}$; e) $\frac{2X+Y}{9X^2-Y^2}\cdot\frac{3X-Y}{2XY+Y^2}$; f) $\frac{(3X+2)^2}{16X^2-25}\cdot\frac{4X-5}{9X+6}$.

4) Efectuați înmulțirile :

a) $(X+Y)^4\cdot\frac{3X^2}{(X+Y)^2}$; b) $\frac{X^3-Y^3}{X^2+4XY+4Y^2}\cdot\frac{X+2Y}{X-Y}$; c) $\frac{X^3+XY^2}{X^3-Y^3}\cdot\frac{X^2-XY}{X^4-Y^4}$;
d) $\frac{XY}{X^2-Y^2}\cdot\frac{X+Y}{X}\cdot\frac{X-Y}{2Y}$; e) $\frac{X^4-Y^4}{(X-Y)^2}\cdot\frac{X-Y}{X^2+XY}$; f) $\frac{4X^2}{Y^2}\cdot\frac{XY}{X+Y}\cdot\frac{X^2-Y^2}{2XY}$;
g) $\frac{1-X^2}{1+Y}\cdot\frac{1-Y^2}{X+X^2}\cdot\left(1+\frac{X}{1-X}\right)$.

5) Efectuați împărțirile :

a) $\frac{1}{X^3}:\frac{2}{X^2}$; b) $X^2:\frac{X+1}{2X}$; c) $\frac{5X-2}{X-3}:\frac{X+2}{4X-12}$; d) $\frac{X^2-Y^2}{4XY}:\frac{X-Y}{3Y}$;
e) $\frac{X^2+3X}{4XY-16Y}:\frac{X+3}{3X-12}$; f) $\frac{XY+Y^2}{X^2-2XY+Y^2}:\frac{Y^2}{X^2-Y^2}$; g) $\frac{(X+Y)^3}{X^4-Y^4}:\frac{(X+Y)^2}{X-Y}$.

6) Scrieți ca fracție rațională :

a) $\dfrac{\frac{X^4-81}{9X^2+12X+4}}{\frac{X^2+9}{9X^2-4}}$; b) $\dfrac{\frac{X^2-2XY}{Y^2+4}}{\frac{XY-2Y^2}{Y^4-16}}$.

7) Efectuați :

a) $\left(X-\frac{1}{X-1}\right)\cdot\frac{(X-1)^2}{X^2-X-1}$; b) $\frac{X^3+8}{X^2+2X+2}\cdot\left(\frac{1}{X+2}\right)$; c) $\frac{(X^2-Y^2)^2}{(X^2+Y^2)^2}+\frac{4X}{X^2+Y^2}\cdot\frac{XY^2}{X^2+Y^2}$; d) $\left(X+\frac{X}{X-1}\right):\left(X-\frac{X}{X-1}\right)$; e) $\left(\frac{X^2}{Y^3}+\frac{1}{X}\right):\left(\frac{X}{Y^2}-\frac{1}{Y}+\frac{1}{X}\right)$;
f) $\dfrac{1}{1+\frac{X}{Y+Z}}+\dfrac{1}{1+\frac{Y}{X+Z}}+\dfrac{1}{1+\frac{Z}{X+Y}}$.

8) Efectuați :

a) $\dfrac{\frac{X}{Y}+\frac{Y}{X}+1}{\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}}:\frac{X^3-Y^3}{X^2-Y^2}$; b) $\dfrac{\frac{X^2+Y^2}{Y}-X}{\frac{1}{Y}-\frac{1}{X}}:\frac{X^3+Y^3}{X^2-Y^2}$.

LUCRĂRI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUŞIRII UNOR CUNOŞTINŢE ŞI DEPRINDERI DE BAZĂ

LUCRAREA I

1) Efectuaţi :

a) $(3X^2-6X+2)+(3X^2+2X-4)$; b) $(5X^2-4X+3)-(2X^2-5X+4)$; c) $(8X-Y+3)\cdot(5X^2-Y)$; d) $(X^6-3X^4-4X^3+6X+4):(X^3-3X-2)$.

2) Descompuneţi în factori :

a) $16X^2-4$; b) $3X^4+6X^3+3X^2$; c) $8X^3-Y^3$; d) X^4-X^3+8X-8.

3) Arătaţi că polinomul $X-3$ divide polinomul X^3-8X-3.

4) Aflaţi cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun al polinoamelor : X^2+4X+4 şi X^3+8.

LUCRAREA A II-a

1) Simplificaţi fracţiile raţionale :

a) $\dfrac{-8X^3Y^4}{6X^4Y^3}$; b) $\dfrac{3XY-3Y^2}{3Y^2+3XY}$; c) $\dfrac{4(X+Y)^2-4(X+Y)+1}{2X+2Y-1}$.

2) Efectuaţi :

a) $\dfrac{X-3}{3}+\dfrac{2X^2}{6X}$; b) $2X-1-\dfrac{X+4}{2X}$; c) $\dfrac{1}{X^2}-\dfrac{1}{Y^2}-\dfrac{X-Y}{XY}$.

3) Ce fracţie raţională poate fi scrisă în locul semnului ..., astfel încît :

a) $\dfrac{X^2+2X+1}{X-1}+\ldots=\dfrac{X^2-2X+1}{X-1}$; b) $\dfrac{X^2+2X+1}{X-1}\cdot(\ldots)=\dfrac{X^2-2X+1}{X-1}$?

4) Efectuaţi :

$$\left(\frac{X^2-X}{X^2+1}+\frac{2X^2}{X^3-X^2+X-1}\right):\frac{X^2}{X^2-1}.$$

CAPITOLUL IV

ECUAŢII DE GRADUL AL DOILEA

1. PREZENTARE

Multe probleme practice se pot rezolva folosind ecuaţiile. De exemplu, să presupunem că un arhitect vrea să proiecteze o cameră de 15 m^2, dorind ca lungimea camerei să fie cu 2 m mai mare decît lăţimea.

Dacă notăm cu x lăţimea camerei (măsurată în m), atunci lungimea camerei este $x + 2$, iar aria camerei este $(x + 2) \cdot x$. Putem rezolva problema arhitectului dacă reuşim să rezolvăm ecuaţia :

$$(\mathbf{x} + 2) \cdot \mathbf{x} = 15 \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}).$$

Această ecuaţie este echivalentă cu ecuaţia :

$$\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} - 15 = 0 \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}),$$

care este o ecuaţie de gradul al II-lea. O soluţie a sa este evidentă, anume $x = 3$. Dar ecuaţia mai are încă o soluţie, anume -5 (verificaţi !).

Arhitectul îşi rezolvă problema dacă proiectează camera avînd lungimea de 5 metri şi lăţimea de 3 metri. Aceasta este oare singura soluţie acceptabilă pentru arhitect ?

DEFINIŢIE. Vom numi **ecuaţie de gradul al II-lea** orice ecuaţie de forma :

$$a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{x} + c = 0 \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}),$$

cu a, b, c numere reale. Putem presupune de la început că $a \neq 0$, căci pentru $a = 0$ obţinem o ecuaţie liniară (de gradul I).

Să notăm $P(X) = aX^2 + bX + c$; acesta este un polinom în X de gradul al II-lea ; de aici provine şi numele ecuaţiei. Soluţiile ecuaţiei se mai numesc şi **rădăcini** ale polinomului.

De exemplu, 7 este soluţie a ecuaţiei $\mathbf{x}^2 - 16\mathbf{x} + 63 = 0$, deoarece este adevărat că $7^2 - 16 \cdot 7 + 63 = 0$. Notînd $P(X) = X^2 - 16X + 63$, constatăm că $P(7) = 0$, deci 7 este rădăcină a polinomului $P(X)$. 8 este rădăcină ? Dar 9 ?

EXERCIȚIU REZOLVAT

Pentru ce valori ale lui m și n ecuația $x^2 + mx + n = 0$ admite soluțiile 4 și -3?

Deoarece 4 este soluție a ecuației, înlocuind necunoscuta x cu 4 obținem propoziția adevărată $4^2 + m \cdot 4 + n = 0$. La fel, din faptul că -3 este soluție, obținem propoziția adevărată : $(-3)^2 + m \cdot (-3) + n = 0$.

Deci m și n sînt soluții ale sistemului :

$$16 + 4m + n = 0$$

$$9 - 3m + n = 0.$$

Obținem $m = -1$ și $n = 12$.

Dacă notăm $P(X) = X^2 + mX + n$, faptul că 4 și -3 sînt rădăcini ale polinomului $P(X)$ se exprimă prin condițiile $P(4) = 0$ și $P(-3) = 0$, care conduc la sistemul de ecuații de mai sus.

EXERCIȚII

1) Formați ecuațiile de gradul al II-lea care au coeficienții a, b, c dați în tabelul următor (primul rînd este completat ca model). Verificați, pentru fiecare dintre ecuații, dacă vreun element din mulțimea $\left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ este soluție.

a	b	c	Ecuația
2	-9	7	$2x^2 - 9x + 7 = 0$
4	0	1	
5	17	0	
1	-3	-3	
-1	0	5	
6	0	0	
-1	4	0	

2) Precizați coeficienții a, b, c pentru fiecare dintre ecuațiile :
a) $2x^2 - 20x + \sqrt{19} = 0$;
b) $x^2 - x + 1 = 0$; c) $2x^2 + 15 = 0$;
d) $x^2 = 0$; e) $-x^2 + 4x = 0$; f) $-9x^2 = 0$;
g) $-x^2 + x\sqrt{7} + x - 5 = 0$; h) $3x^2 + 5x\sqrt{5} = 0$; i) $(m^2 + 1)x^2 + 2mx + 3(m + 2) = 0$.

3) Dintre următoarele ecuații, care sînt echivalente cu ecuații de gradul al II-lea ?

a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = (x^2 + 3)^2$; b) $x(x + 2)(x + 3) = x(x + 1)(x + 4)$;
c) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 8x(x^2 + 2x + 15) = 0$; d) $(\sqrt{2} + x + 1)^2 + (\sqrt{2} - x - 1)^2 = 0$.

4) Este 5 o soluție a ecuației $-x^2 - 4x + 5 = 0$? Dar -5 ? Este $-1 + \sqrt{2}$ rădăcină a trinomului $X^2 - 2X - 1$? Dar $1 + \sqrt{2}$?

5) a) Aflați valoarea lui m știind că 1 este soluție a ecuației

$$5x^2 - mx + 7 - m = 0.$$

b) Pentru ce valoare a parametrului p, ecuația $px^2 - 5x - 4p = 0$ are soluția 2 ?

2. REZOLVAREA ECUAȚIEI DE GRADUL AL II-LEA. CAZURI SPECIALE

De exemplu, să rezolvăm ecuația :

$$x^2 - 6x = 0 \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Constatăm imediat, prin înlocuire directă, că numărul 0 este soluție a ecuației.

Să presupunem că numărul real s este soluție a ecuației ; atunci, dacă înlocuim necunoscuta x cu s, obținem propoziția adevărată $s^2 - 6s = 0$, sau $s^2 = 6s$.

Distingem două cazuri :

— soluția s este 0 ;

— $s \neq 0$; în acest caz, împărțind ambii membri cu s, obținem $s = 6$. Deoarece $6^2 - 6 \cdot 6 = 0$, ecuația are două soluții : 0 și 6.

Să considerăm polinomul $P(X) = X^2 - 6X$. Știm că rădăcinile sale sînt 0 și 6. Dacă-l descopunem în factori : $P(X) = X(X - 6)$, observăm că cei doi factori sînt de forma $X - s$, unde s este rădăcină a polinomului.

Alt exemplu : ecuația $(x - 1)(x + 15) = 0 \ (x \in \mathbf{R})$.

Înlocuind necunoscuta x prin numărul s, presupunînd că acesta este soluție, obținem $(s - 1)(s + 15) = 0$. Dacă $s \neq 1$, împărțim ambii membri cu $s - 1$ și obținem $s + 15 = 0$, adică $s = -15$. Ecuația are două soluții, 1 și -15 (verificați că sînt soluții !).

Polinomul $P(X) = (X - 1)(X + 15)$ este deja descompus în factori. Observați legătura între factori și rădăcinile sale !

Pentru a rezolva ecuația $2x^2 + 3x = 0$, $x \in \mathbf{R}$, se obișnuiește să se procedeze astfel :

— se descompune în factori : $x(2x + 3) = 0$;

— fiecare factor ne dă o soluție ; din $x = 0$ obținem soluția 0 ; din $2x + 3 = 0$, obținem soluția $-\frac{3}{2}$.

EXERCIȚII

1) Rezolvați ecuațiile (presupunem $x \in \mathbf{R}$) :

a) $x^2 = 4x$; b) $x^2 = -3x$; c) $4x^2 = x$; d) $-2x^2 = -7x$.

2) Rezolvați ecuațiile :

a) $x^2 - 3x = 0$; b) $x^2 + 2x = 0$; c) $2x^2 - 6x = 0$; d) $2x^2 + 6x = 0$; e) $7x^2 - x = 0$; f) $-5x^2 + 7x = 0$; g) $-0{,}6x^2 - 3{,}6x = 0$.

3) Rezolvați ecuațiile :

a) $x(x + 8) = 0$; b) $(x + 1)(x - 2) = 0$; c) $(x + 2)(x - 3) = 0$; d) $(2x - 5)(5x - 2) = 0$; e) $(3x - 8)(2x - 13) = 0$.

Am rezolvat ecuații de gradul al II-lea de forma $ax^2 + bx = 0$ (deci în care lipsește termenul liber). Vom rezolva acum ecuații în care $b = 0$, deci de forma $ax^2 + c = 0$.

De exemplu, să rezolvăm ecuaţia

$$\mathbf{x}^2 - 81 = 0, \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}.$$

Ca de obicei, presupunem că numărul s este soluţie a ecuaţiei ; să înlocuim necunoscuta $\mathbf{x}$ cu numărul s ; obţinem propoziţia adevărată $s^2 - 81 = 0$, pe care o putem scrie astfel $(s + 9)(s - 9) = 0$.

Distingem două cazuri :

1) $s = -9$;

2) $s \neq -9$; în acest caz $s + 9 \neq 0$; împărţind ambii membri cu $s + 9$, obţinem $s - 9 = 0$ deci $s = 9$.

Atît -9 cît şi 9 sînt soluţii ale ecuaţiei.

Să observăm că polinomul $P(X) = X^2 - 81$ se descompune în factori astfel : $P(X) = (X + 9)(X - 9)$; factorul $X + 9$ ne dă soluţia -9, iar factorul $X - 9$ ne dă soluţia 9.

Alt exemplu : să aflăm soluţiile ecuaţiei $5\mathbf{x}^2 - 3 = 0$.

Polinomul $P(X) = 5X^2 - 3$ se descompune în factori astfel :

$$P(X) = 5\left(X^2 - \frac{3}{5}\right) = 5\left(X + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(X - \sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

Deci ecuaţia are soluţiile $-\sqrt{\frac{3}{5}}$ şi $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Să rezolvăm acum ecuaţia :

$$6\mathbf{x}^2 + 11 = 0, \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}.$$

Pentru orice număr real s, avem $s^2 \geq 0$; deci $6s^2 \geq 0$, de unde rezultă că $6s^2 + 11 \geq 11 > 0$. Aşadar, dacă înlocuim necunoscuta $\mathbf{x}$ prin numărul s, propoziţia $6s^2 + 11 = 0$ este falsă, oricare ar fi s. Ecuaţia dată nu are nici o soluţie.

EXERCIŢII

1) Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $\mathbf{x}^2 - 1 = 0$; b) $4\mathbf{x}^2 - 1 = 0$; c) $-\mathbf{x}^2 + 9 = 0$; d) $2\mathbf{x}^2 - 8 = 0$; e) $\mathbf{x}^2 + 1 = 0$; f) $4\mathbf{x}^2 - 0,05 = 0$; g) $-\mathbf{x}^2 - 8 = 0$; h) $-\mathbf{x}^2 + 2 = 0$.

2) Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $2\mathbf{x}^2 - 3 = 0$; b) $\sqrt{2}\mathbf{x}^2 - 2\sqrt{2} = 0$; c) $4\mathbf{x}^2 - 0,5 = 0$; d) $144\mathbf{x}^2 = 1$; e) $49\mathbf{x}^2 = (\sqrt{5} + 1)^2$; f) $2\mathbf{x}^2 - (1 + \sqrt{2})^2 = 0$.

Exemplele de mai sus ne arată că ecuaţia de gradul al II-lea $a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{x} + c = 0$, în cazurile $b = 0$ sau $c = 0$, se rezolvă simplu, prin descompunere în factori. Rezolvarea ecuaţiei prin descompunerea trinomului în factori este posibilă şi în alte cazuri.

De exemplu, să rezolvăm ecuaţia

$$4\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x} + 1 = 0 \ (\mathbf{x} \in \mathbf{R}).$$

Descompunem în factori polinomul $P(X) = 4X^2 + 4X + 1$, astfel : $P(X) = (2X + 1)^2 = (2X + 1)(2X + 1)$. Amîndoi factorii ne dau aceeași rădăcină a polinomului, anume $-\frac{1}{2}$. Ecuația are deci o singură soluție ; dar, se obișnuiește să se spună că polinomul are rădăcină *dublă*.

Alt exemplu. Fie ecuația $x^2 + 2x - 3 = 0$. Vom descompune în factori trinomul $X^2 + 2X - 3$, scoțînd în evidență un pătrat perfect : $X^2 + 2X - 3 = X^2 + 2X + 1 - 4 = (X + 1)^2 - 2^2 = (X + 1 + 2)(X + 1 - 2) = (X + 3)(X - 1)$. Așadar ecuația are două soluții : -3 și 1.

Scoțînd în evidență un pătrat perfect, ecuația $x^2 - 2x + 40 = 0$ poate fi înlocuită cu ecuația echivalentă :

$$(x - 1)^2 + 39 = 0.$$

Observăm că ecuația nu are nici o soluție.

Ecuația $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ se rezolvă observînd că trinomul din membrul stîng poate fi descompus în factori astfel :

$$X^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})X + \sqrt{6} = X^2 - X\sqrt{2} - X\sqrt{3} + \sqrt{6} =$$
$$= X(X - \sqrt{2}) - \sqrt{3}(X - \sqrt{2}) = (X - \sqrt{2})(X - \sqrt{3}).$$

Soluțiile sînt deci $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$.

EXERCIȚII

1) (oral) Explicați de ce următoarele ecuații nu au soluții :

a) $x^2 = 1 - \sqrt{2}$; b) $x^2 + 6x + 9 = -1$; c) $5(x + 1)^2 + 29 = 0$; d) $(x - m)^2 = 4 - \sqrt{17}$.

2) Rezolvați ecuațiile (a, b și m sînt parametri reali) :

a) $x^2 - 1 = 0$; b) $x^2 + 1 = 0$; c) $x^2 = 100$; d) $9x^2 = 1$; e) $4x^2 - 0{,}01 = 0$; f) $144x^2 = -1$; g) $x^2 = 4\pi^2$; h) $0{,}0004x^2 = 625$; i) $x^2 - (a + \sqrt{2})^2 = 0$; j) $49x^2 = (\sqrt{5} + 1)^2$; k) $13x^2 + (a - 9)^2 = 0$; l) $5x^2 + a^2 + b^2 = 2ab$; m) $2x^2 = 3m^2$.

3) Aflați toate numerele reale care sînt egale cu pătratele lor.

4) Ionică a scris :

„Ecuația $4x^2\sqrt{2} - 2x\sqrt{6} = 0$ se rezolvă astfel : trecem termenul $2x\sqrt{6}$ în membrul drept, schimbîndu-i semnul : $4x^2\sqrt{2} = 2x\sqrt{6}$; împărțim ambii membri ai ecuației prin $2x\sqrt{2}$ și obținem $2x = \sqrt{3}$; deci soluția ecuației este $\frac{\sqrt{3}}{2}$". În ce constă greșeala lui Ionică ?

5) Rezolvați ecuațiile (m este un parametru real) :

a) $(x + 8)(x - 5) = 0$; b) $(3x - 5)(x + 5{,}19) = 0$; c) $4x(5x - 13) = 0$; d) $-12x^2 = 0$; e) $x^2 + 31x = 0$; f) $2x^2 = 19x$; g) $-x^2 = 59x$; h) $-\sqrt{8}x^2 + 2x = 0$; i) $x(x - 1) + 13(x - 1) = 0$; j) $x^2 + mx = 0$; k) $(x + 1)^2 = x + 1$; l) $(1 + m^2)x^2 = -x$.

6) Rezolvați ecuațiile :

a) $(x + 1)^2 - 25 = 0$; b) $x^2 + 4x + 4 = 1$; c) $x^2 + 4x + 4 = -1$; d) $x^2 + 4x + 4 = 0$; e) $x^2 + 10x + 16 = 0$; f) $x^2 - 10x + 25 = 0$; g) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{5})x + \sqrt{10} = 0$; h) $x^2 - (1 + \pi)x + \pi = 0$; i) $\sqrt{3}x^2 + (1 + \sqrt{3})x + 1 = 0$; j) $(x - 7)^2 = 2$; k) $x^2 + (m + n)x + mn = 0$; l) $mnx^2 + (m + n)x + 1 = 0$ ($m \neq 0$, $n \neq 0$).

7) Aproximaţi, cu eroare de cel mult 0,01, rădăcinile ecuaţiilor : a) $x^2 = 2$; b) $x^2 = \pi$; c) $x^2 - 3{,}1 = 0$; d) $4x^2 = 7$; e) $3x^2 - 5 = 0$.

8*) a) Demonstraţi că dacă a, b sînt două numere reale astfel încît $ab = 0$, atunci cel puţin unul dintre ele este 0.

b) Demonstraţi că dacă a, b, c sînt trei numere reale astfel încît $abc = 0$, atunci cel puţin unul dintre ele este 0.

c) Rezolvaţi ecuaţiile :

$$x(x+1)(x+2) = 0 \; ; \; (x-1)x^2 = (x-1)(6x-8) \; ; \; x^3 + (1+\sqrt{5})x^2 + \sqrt{5}x = 0.$$

9) O coală de hîrtie pentru desen are aria de 1 m^2 iar raportul dimensiunilor egal cu $\sqrt{2}$. Aflaţi dimensiunile, cu aproximaţie de 1 mm.

3. REZOLVAREA ECUAŢIEI DE GRADUL AL II-LEA. FORMULA DE REZOLVARE

Vom stabili o metodă generală, care ne arată dacă o ecuaţie de gradul al II-lea are sau nu soluţii, iar dacă are soluţii cum le obţinem.

Să luăm de exemplu ecuaţia :

$$15x^2 + 8x + 1 = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Împărţind ambii membri prin 15 (astfel încît coeficientul lui x^2 să devină 1), obţinem ecuaţia echivalentă :

$$x^2 + \frac{8}{15}x + \frac{1}{15} = 0.$$

Să considerăm trinomul $P(X) = X^2 + \frac{8}{15}X + \frac{1}{15}$. Să ne reamintim formula $(X+u)^2 = X^2 + 2uX + u^2$. Vom încerca să scoatem în evidenţă un pătrat perfect, care să conţină primii doi termeni ai trinomului. Din $2u = \frac{8}{15}$ obţinem $u = \frac{4}{15}$.

Să descompunem în factori :

$$P(X) = X^2 + \frac{8}{15}X + \frac{1}{15} = X^2 + 2\cdot\frac{4}{15}X + \left(\frac{4}{15}\right)^2 - \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \frac{1}{15} =$$

$$= \left(X + \frac{4}{15}\right)^2 - \frac{1}{225} = \left(X + \frac{4}{15}\right)^2 - \left(\frac{1}{15}\right)^2 = \left(X + \frac{4}{15} + \frac{1}{15}\right)\left(X + \frac{4}{15} - \frac{1}{15}\right) =$$

$$= \left(X + \frac{1}{3}\right)\left(X + \frac{1}{5}\right).$$

Deci ecuaţia are soluţiile $-\frac{1}{3}$ şi $-\frac{1}{5}$.

Ecuaţia $15x^2 - 150x + 405 = 0$ este echivalentă cu :

$$x^2 - 10x + 27 = 0,$$

adică cu $(\mathbf{x} - 5)^2 + 2 = 0$; deci ecuaţia nu are soluţii.

Să procedăm la fel şi în cazul general. Ecuaţia

$$ax^2 + bx + c = 0$$

este echivalentă cu ecuaţia $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Să considerăm trinomul $P(X) = X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}$. Din $2u = \frac{b}{a}$ obţinem $u = \frac{b}{2a}$.

Vom completa un pătrat perfect :

$$P(X) = X^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}X + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Putem descompune trinomul $P(X)$ în factori de gradul I numai dacă numărul $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ este ≥ 0. Semnul acestui număr este acelaşi cu semnul numărătorului $b^2 - 4ac$. De aceea, numărul $b^2 - 4ac$ este numit **discriminantul*** ecuaţiei (sau al trinomului); el se notează de obicei cu litera grecească Δ (se citeşte „delta").

Distingem trei cazuri :

I. $\Delta > 0$. În acest caz vom putea descompune în factori :

$$P(X) = \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(X + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(X + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Deci ecuaţia $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ are două soluţii :

$$-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ şi } -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Se obişnuieşte să se noteze soluţiile ecuaţiei prin x_1 şi x_2. Cele două soluţii se scriu sub formă concentrată astfel :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ unde } \Delta = b^2 - 4ac.$$

II. $\Delta = 0$. În acest caz trinomul este deja descompus în factori :

$$P(X) = \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Trinomul are o rădăcină dublă, iar ecuaţia are o singură soluţie, anume $-\frac{b}{2a}$.

III. $\Delta < 0$. În acest caz $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$, deci $P(s) > 0$ pentru orice număr real s ; ecuaţia nu are nici o soluţie.

---

* a discrimina — a separa. Discriminantul separă cazurile.

Putem sistematiza rezolvarea ecuaţiei de gradul al II-lea în următoarea schemă :

Cazul I :	$\Delta > 0$	**Ecuaţia are două soluţii distincte** $x_1 \neq x_2$	**Soluţiile se calculează cu formula** $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
Cazul II :	$\Delta = 0$	**Ecuaţia are o singură soluţie** $x_1 = x_2$	**sau** $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Cazul III :	$\Delta < 0$	**Ecuaţia nu are nici o soluţie**	

EXERCIŢIU

(oral) Explicaţi de ce:

a) dacă ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ nu are nici o soluţie, atunci $\Delta = b^2 - 4ac < 0$;

b) dacă ecuaţia are două soluţii distincte, atunci $\Delta > 0$.

Observaţii. 1) Formula de rezolvare a ecuaţiei de gradul al II-lea este generală, deci poate fi aplicată şi ecuaţiilor în care $b = 0$ sau $c = 0$; dar, în unele cazuri, este avantajos să lucrăm prin descompunere în factori, această metodă fiind uneori mai rapidă.

2) Dacă $b = 2b'$, să observăm că formula de rezolvare a ecuaţiei devine

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \quad ;$$

dacă în plus $a = 1$, atunci formula de rezolvare este : $x_{1,2} = -b' \pm \sqrt{b'^2 - c}$.

Rezolvarea ecuaţiei cu formula generală este o metodă algoritmică ; ea poate fi programată pentru calculatoarele electronice :

Algoritmul de calcul al soluţiilor este următorul :

Pasul 1. Citeşte coeficienţii a, b şi c ;

Pasul 2. Calculează $\Delta = b^2 - 4ac$;

Pasul 3. Dacă $\Delta < 0$, scrie „Ecuaţia nu are nici o soluţie", STOP.
Dacă $\Delta \geq 0$, continuă cu pasul 4 ;

Pasul 4. Calculează $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ · Scrie x_1. Dacă $\Delta = 0$, scrie „O singură soluţie", STOP. Dacă $\Delta > 0$, continuă cu pasul 5 ;

Pasul 5. Calculează $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ · Scrie x_2. STOP.

EXEMPLE

1) Să rezolvăm ecuaţia :

$$x^2 - 107x + 1302 = 0.$$

Să recunoaştem coeficienţii : $a = 1$; $b = -107$; $c = 1302$. Deci $\Delta = (-107)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1302 = 11449 - 5208 = 6241$.

Observăm că $\Delta > 0$, deci ecuaţia are două soluţii. Aplicînd formula de rezolvare, obţinem :

$$x_{1,2} = \frac{-(-107) \pm \sqrt{6241}}{2 \cdot 1} = \frac{107 \pm 79}{2}.$$

Deci $x_1 = \dfrac{107 - 79}{2} = 14$ şi $x_2 = \dfrac{107 + 79}{2} = 93$.

2) Să rezolvăm ecuaţia :

$$0{,}01x^2 + 4{,}2x + 441 = 0.$$

Observăm că $\Delta = 4{,}2^2 - 4 \cdot 0{,}01 \cdot 441 = 17{,}64 - 17{,}64 = 0$; deci ecuaţia are o singură soluţie, anume $-\dfrac{4{,}2}{2 \cdot 0{,}01} = -210$.

3) Fie ecuaţia $x^2 + \sqrt{79}x + 20 = 0$. Să calculăm discriminantul : $\Delta = (\sqrt{79})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 79 - 80 = -1$. Deoarece $\Delta < 0$, ecuaţia nu are soluţii.

EXERCIŢII REZOLVATE

1) a) Demonstraţi că pentru orice m real, ecuaţia

$$mx^2 + (m^2 + 1)x + m = 0, \ x \in \mathbf{R},$$

are soluţii.

b) Calculaţi soluţiile, presupunînd $m > 1$.

c) Aflaţi valorile parametrului m pentru care ecuaţia are o singură soluţie.

Rezolvare.

a) Calculăm discriminantul ecuaţiei :

$$\Delta = (m^2 + 1)^2 - 4 \cdot m \cdot m = m^4 + 2m^2 + 1 - 4m^2 = (m^2 - 1)^2.$$

Constatăm că $\Delta \geq 0$, deci ecuaţia are soluţii pentru orice valoare a parametrului m.

b) Să calculăm soluţiile :

$$x_{1,2} = \frac{-(m^2 + 1) \pm \sqrt{(m^2 - 1)^2}}{2m} = \frac{-m^2 - 1 \pm |m^2 - 1|}{2m}.$$

Pentru $m > 1$, avem $|m^2 - 1| = m^2 - 1$. Soluţiile sînt :

$$x_1 = \frac{-m^2 - 1 - m^2 + 1}{2m} = -m \ ; \ x_2 = \frac{-m^2 - 1 + m^2 - 1}{2m} = -\frac{1}{m}.$$

c) Ecuaţia are o singură soluţie numai dacă discriminantul ei este 0. Din $(m^2 - 1)^2 = 0$ obţinem $m^2 = 1$, adică $m = 1$ sau $m = -1$.

2) Se dă ecuaţia :

$$mx^2 - 2(m-1)x + m = 0, \ x \in \mathbf{R},$$

unde m este un parametru real diferit de 0. Pentru ce valori ale parametrului m, ecuaţia :

a) nu are soluţii ;
b) are o singură soluţie ;
c) are două soluţii ?

Rezolvare. Calculăm discriminantul :

$$\Delta = 4(m-1)^2 - 4m^2 = 4(m^2 - 2m + 1 - m^2) = 4(-2m + 1).$$

Discriminantul este < 0 dacă şi numai dacă $-2m + 1 < 0$, adică $m > \frac{1}{2}$.

Constatăm că :

— dacă $m \in \left(-\infty ; \frac{1}{2}\right)$, ecuaţia are două soluţii distincte ; acestea pot fi calculate cu formulele obişnuite ;

— dacă $m = \frac{1}{2}$, ecuaţia are o singură soluţie, anume -1 ;

— dacă $m \in \left(\frac{1}{2} ; +\infty\right)$, ecuaţia nu are soluţii.

3) Aproximaţi, cu eroare de cel mult 0,01, soluţiile ecuaţiei :

$$x^2 - 10x - 5 = 0, \ x \in \mathbf{R}.$$

Rezolvare. Calculăm discriminantul : $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 120$. Deci

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{120}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{30}}{2} = 5 \pm \sqrt{30}.$$

Avem $\sqrt{30} \approx 5{,}47$ (cu eroare de cel mult o sutime). Deci $x_1 \approx -0{,}47$ şi $x_2 \approx 10{,}47$.

EXERCIŢII

1) Completaţi tabelul :

Ecuaţia	a	b	c	Δ	Numărul soluţiilor
$x^2 + 5x - 6 = 0$					
$3x^2 + 7x + 4 = 0$					
$x^2 - 14x + 40 = 0$					
$x^2 + x + 180 = 0$					
$4x^2 + 4x + 1 = 0$					
$3x^2 + 13x - 14 = 0$					

2) Aflaţi rădăcinile polinoamelor :

a) $X^2 - 14X + 24$; b) $X^2 + 14X + 24$; c) $15X^2 - 8X + 1$; d) $2X^2 + 3X + 1$.

3) Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $5x^2 - 9x - 2 = 0$; b) $3x^2 + 11x - 20 = 0$; c) $1,5x^2 - 5,3x - 2,8 = 0$; d) $0,11x^2 + 0,71x + 0,3 = 0$; e) $x^2 - 11x - 81 = 0$.

4) Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $10x^2 + 20x - 30 = 0$; b) $x^2 + 2x - 3 = 0$; c) $0,1x^2 + 0,2x - 0,3 = 0$; d) $0,01x^2 + 0,02x - 0,03 = 0$. Ce observaţi ?

5) Stabiliţi dacă ecuaţiile următoare au sau nu soluţii şi, în caz afirmativ, rezolvaţi-le :
a) $2x^2 - x - 1 = 0$; b) $x^2 + 6x + 5 = 0$; c) $-x^2 + 90x - 89 = 0$; d) $x^2 + 5x + 7 = 0$; e) $3x^2 - 4x + 1 = 0$; f) $x^2 + x + 1 = 0$; g) $x^2 - x + 1 = 0$; h) $x^2 - x - 1 = 0$.

6) Demonstraţi că pentru orice valoare reală a parametrului m, ecuaţia $2x^2 + mx - 13 = 0$ are soluţii. Există valori ale lui m pentru care ecuaţia are o singură soluţie ?

7) Pentru ce valori ale lui m ecuaţia $4x^2 + mx + 529 = 0$ are o singură soluţie ? Pentru aceste valori, rezolvaţi ecuaţia.

8) Calculaţi cu aproximaţie de o sutime soluţiile ecuaţiei :
a) $x^2 - 10x - 5 = 0$; b) $x^2 - 2x - 2 = 0$; c) $x^2 - 2x - 17 = 0$.

9) Aproximaţi, cu eroare de cel mult 0,001, soluţiile ecuaţiilor :

a) $x^2 - 14x - 1 = 0$; $x^2 + 4\sqrt{5}x + 1 = 0$.

10) Aflaţi valoarea lui m ştiind că 1 verifică ecuaţia $mx^2 - 14x + 25 = 0$. Aflaţi apoi cealaltă soluţie.

11) Orice ecuaţie de forma $ax^2 + bx + c = 0$ cu $a \neq 0$ poate fi adusă la forma $x^2 + px + q = 0$, prin împărţire cu a. Scrieţi algoritmul de rezolvare pentru ecuaţia $x^2 + px + q = 0$.

4. ECUAŢII ECHIVALENTE CU ECUAŢII DE GRADUL AL II-LEA

Exemplul 1. Fie ecuaţia

$$x(x - 1) = 12, x \in \mathbf{R}.$$

Să presupunem că numărul real s este soluţie a acestei ecuaţii ; deci este adevărat că $s(s - 1) = 12$. Putem scrie $s^2 - s = 12$, sau $s^2 - s - 12 = 0$. Aşadar s este soluţie a ecuaţiei de gradul al II-lea :

$$x^2 - x - 12 = 0, x \in \mathbf{R}.$$

Şi reciproc, orice soluţie a acestei euaţii de gradul al II-lea este soluţie şi a ecuaţiei $x(x - 1) = 12$, $x \in \mathbf{R}$. Cele două ecuaţii sînt echivalente.

Observaţi cum am obţinut ecuaţia de gradul al II-lea

$$x^2 - x - 12 = 0$$

din ecuaţia iniţială $x(x - 1) = 12$.

Exemplul 2. Ecuaţia

$$(x + 1)^2 = 3(x + 1), x \in \mathbf{R}$$

se poate rezolva în felul următor : observăm că -1 este soluţie ; dacă s este o altă soluţie a ecuaţiei, din $(s+1)^2 = 3(s+1)$ şi $s \neq -1$ rezultă $s+1=3$, adică $s=2$. Într-adevăr, şi numărul 2 este soluţie a ecuaţiei (verificaţi!). Deci ecuaţia are două soluţii : -1 şi 2.

Am fi putut obţine soluţiile acestei ecuaţii şi în alt mod, observînd că ea este echivalentă cu ecuaţia $x^2 + 2x + 1 = 3x + 3$, $x \in \mathbf{R}$, sau cu ecuaţia de gradul al II-lea

$$x^2 - x - 2 = 0, \; x \in \mathbf{R}$$

şi rezolvînd această ultimă ecuaţie.

Exemplul 3. Ecuaţia

$$-9 + (x+1)^2 = 3(x-2)^2, \; x \in \mathbf{R}$$

este echivalentă cu

$$-9 + x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - 12x + 12, \; x \in \mathbf{R},$$

deci cu ecuaţia de gradul al II-lea :

$$-2x^2 + 14x - 20 = 0, \; x \in \mathbf{R}.$$

Rezolvaţi-o!

Exemplul 4. Fie ecuaţia

$$\frac{x^2+5}{3} = \frac{9x+1}{5}, \; x \in \mathbf{R}.$$

Eliminînd numitorii, o înlocuim cu :

$$5(x^2+5) = 3(9x+1), \; x \in \mathbf{R},$$

adică cu

$$5x^2 + 25 = 27x + 3, \; x \in \mathbf{R}.$$

Este deci echivalentă cu ecuaţia de gradul al II-lea :

$$5x^2 - 27x + 22 = 0,$$

ale cărei soluţii, obţinute cu formulele obişnuite, sînt 1 şi $\frac{22}{5} = 4{,}4$.

Exemplul 5. Fie ecuaţia

$$\frac{2x-1}{x+7} = \frac{3x+4}{x-1}.$$

Dacă înlocuim necunoscuta x prin -7, în membrul stîng numitorul este 0 ; la fel, dacă înlocuim necunoscuta x prin 1, în membrul drept numitorul este 0.

Din această cauză va trebui să presupunem că -7 şi 1 nu sînt printre valorile pe care le poate lua necunoscuta. Evident, -7 şi 1 nu pot fi soluţii ale ecuaţiei.

Cum rezolvăm această ecuaţie ? Presupunem că numărul s este soluţie a ei ; atunci este adevărat că :

$$\frac{2s-1}{s+7}=\frac{3s+4}{s-1}.$$

Întrucît $s+7\neq 0$ şi $s-1\neq 0$, înmulţim ambii membri cu numărul $(s+7)(s-1)$, care este diferit de 0. Obţinem (după simplificări) :

$$(s-1)(2s-1)=(s+7)(3s+4),$$

$$2s^2-s-2s+1=3s^2+4s+21s+28,$$

$$-s^2-28s-27=0.$$

Aşadar s este soluţie a ecuaţiei de gradul al II-lea :

$$-\mathbf{x}^2-28\mathbf{x}-27=0\ ;$$

rezolvînd-o, obţinem $s=-27$ sau $s=-1$.

Practic, pentru a rezolva ecuaţia $\frac{2\mathbf{x}-1}{\mathbf{x}+7}=\frac{3\mathbf{x}+4}{\mathbf{x}-1}$ procedăm astfel :

— aducem la acelaşi numitor şi eliminăm numitorii :

$$(\mathbf{x}-1)(2\mathbf{x}-1)=(\mathbf{x}+7)(3\mathbf{x}+4)\ ;$$

— trecem la ecuaţia de gradul al II-lea :

$$-\mathbf{x}^2-28\mathbf{x}-27=0.$$

pe care o rezolvăm ;

— dintre soluţiile acestei ecuaţii de gradul al II-lea, eliminăm pe acelea care anulează vreunul dintre numitorii ecuaţiei iniţiale; celelalte sînt soluţiile ecuaţiei iniţiale.

Exemplul 6. Fie ecuaţia $\frac{\mathbf{x}^2-1}{\mathbf{x}-1}=\frac{\mathbf{x}}{3}\cdot$ Pentru a o rezolva procedăm ca în exemplul 5 :

— eliminăm numitorii :

$$3(\mathbf{x}^2-1)=(\mathbf{x}-1)\mathbf{x}\ ;$$

— trecem la ecuaţia de gradul al II-lea :

$$3\mathbf{x}^2-3=\mathbf{x}^2-\mathbf{x},$$

$$2\mathbf{x}^2+\mathbf{x}-3=0\ ;$$

— rezolvăm ecuaţia de gradul al II-lea ; ea are soluţiile 1 şi $-\frac{3}{2}$;

— întrucît 1 anulează numitorul membrului stîng în ecuaţia $\frac{\mathbf{x}^2-1}{\mathbf{x}-1}=\frac{\mathbf{x}}{3}$, această ecuaţie are numai o soluţie, anume $-\frac{3}{2}$ (verificaţi!).

Exemplul 7. Ecuația $\frac{3x^2 + 1}{x^2 + 2} = 2$ se înlocuiește cu :

$$3x^2 + 1 = 2(x^2 + 2),$$

adică cu ecuația de gradul al II-lea

$$x^2 - 3 = 0.$$

Ea are soluțiile $-\sqrt{3}$ și $\sqrt{3}$ (verificați!).

Exemplul 8. Pentru a rezolva ecuația

$$\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

aducem mai întîi ambii membrii ai ecuației la același numitor, eliminînd apoi numitorii :

$$(x + 2)x + (x - 2)5 = 8,$$

adică $$x^2 + 2x + 5x - 10 = 8,$$

sau $$x^2 + 7x - 18 = 0.$$

Rezolvăm această ecuație de gradul al II-lea ; ea are soluțiile 2 și -9.

Să observăm că numărul 2 nu poate fi soluție a ecuației inițiale, deoarece înlocuirea necunoscutei x cu 2 provoacă anularea unor numitori. Ecuația

$$\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

o singură soluție, anume -9 (verificați!).

Exemplul 9. Ecuația

$$(x + 1)^3 = (x - 1)^3$$

este echivalentă cu ecuația

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,$$

adică cu ecuația de gradul al II-lea :

$$6x^2 + 2 = 0.$$

Aceasta nu are nici o soluție.

EXERCIȚII

1) Rezolvați ecuațiile :

a) $x^2 + x = -1$; b) $x^2 - 132 = x$; c) $x^2 + 1 = 5x - 8$.

2) Rezolvați ecuațiile :

a) $(x + 3)^2 = 25(x + 3)$; b) $2(x - 2)^2 = 3(x - 2)$; c) $(2x - 3)^2 = 4$; d) $4(x - 3)^2 = 25$.

3) Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $\frac{x^2+1}{2}=5(x+2)$; b) $\frac{(x-1)^2}{4}=x-2$; c) $\frac{x^2+1}{2}=5(x-2)$.

4) Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $(x+1)^2+(x-2)^2=0$; b) $(x+1)^2+(x-2)^2=3$; c) $(x+1)^2=1-2(x+3)$; d) $x(x-1)=(x+1)(2-x)$.

5) Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $\frac{x^2+3}{x^2+4}=\frac{1}{2}$; b) $\frac{x^2-1}{x^2+1}=-\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{x^2+1}=\frac{3}{x}$; d) $\frac{2x}{x^2+1}=-\frac{1}{2}$.

6) Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $\frac{3x+1}{x+2}=\frac{x-1}{x-2}$; b) $\frac{5x+1}{x+1}=\frac{x+2}{x}$; c) $\frac{x+7}{3x+1}=\frac{x}{x-3}$.

7) Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $\frac{x^2+1}{2}-x=2$; b) $\frac{x^2+3}{6}-\frac{x+4}{3}=5$; c) $\frac{x^2-4}{8}-\frac{2x+3}{5}=1$.

8) Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $\frac{3x+1}{x+2}-\frac{x-1}{x-2}=1$; b) $\frac{4}{9x^2-1}-\frac{x}{1-3x}=\frac{4}{3x+1}$; c) $\frac{4}{x+3}-\frac{5}{3-x}=\frac{1}{x-3}-1$; d) $\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{3(2x-1)}{2x+1}-\frac{8x}{4x^2-1}=0$.

9) Justificaţi de ce ecuaţiile următoare nu au soluţii :

a) $3(x-9)^2=2-\sqrt{5}$; b) $\frac{1}{x^2+1}=-1$; c) $2(x-2)^2+3(x-3)^2=0$.

5. RELAŢII ÎNTRE RĂDĂCINILE ŞI COEFICIENŢII TRINOMULUI DE GRADUL AL II LEA

Să considerăm trinomul de gradul al II-lea

$$P(X)=aX^2+bX+c, \text{ cu } a\neq 0.$$

Dacă discriminantul său $\Delta=b^2-4ac$ este >0, trinomul are două rădăcini ; acestea se calculează în funcţie de coeficienţii a, b şi c cu formulele :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Să presupunem acum că ne sînt cunoscute cele două rădăcini x_1 şi x_2 ale unui trinom de gradul al II-lea. Putem oare afla coeficienţii săi ?

Să calculăm suma şi apoi produsul rădăcinilor :

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Putem scrie astfel :

$$b = -a(x_1 + x_2),$$
$$c = ax_1x_2.$$

Să considerăm că mai multe trinoame de gradul al II-lea au rădăcinile x_1 şi x_2. Dar, dacă ne alegem valoarea lui a (de exemplu, dacă luăm $a = 1$), atunci coeficienţii b şi c sînt *unic determinaţi* de rădăcini.

Formulele

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a},$$

poartă numele de **relaţiile între rădăcinile şi coeficienţii** trinomului de gradul al II-lea (sau **relaţiile lui Viète***).

Observaţie. Dacă se cunosc suma s şi produsul p ale rădăcinilor unei ecuaţii de gradul al II-lea, atunci ea este echivalentă cu ecuaţia :

$$x^2 - sx + p = 0.$$

EXERCIŢII REZOLVATE

1) Calculaţi suma şi produsul soluţiilor ecuaţiei :

$$3x^2 - 7x - 113 = 0.$$

Rezolvare. Ecuaţia are două soluţii, întrucît discriminantul ei este > 0. Fără a calcula soluţiile, putem scrie :

$$x_1 + x_2 = -\frac{-7}{3} = \frac{7}{3}, \quad x_1x_2 = \frac{-113}{3} = -\frac{113}{3}.$$

2) Fie ecuaţia :

$$2x^2 - mx - 3 = 0.$$

a) Demonstraţi că pentru orice valoare a parametrului m ecuaţia are două soluţii.

b) Calculaţi (în funcţie de m) :
— suma rădăcinilor trinomului $2X^2 - mX - 3$;

* **François Viète (1540—1603), matematician francez, unul dintre creatorii algebrei, s-a ocupat în special cu rezolvarea ecuaţiilor.**

— produsul rădăcinilor ;
— suma inverselor rădăcinilor ;
— suma pătratelor rădăcinilor ;
— suma cuburilor rădăcinilor.

Rezolvare. a) Să recunoaştem că $a = 2, b = -m, c = -3$; deci $\Delta = m^2 + 24 > 0$ pentru orice m-real ; deci ecuaţia are două soluţii.

b) Aplicînd formulele lui Viète, obţinem

$$x_1 + x_2 = \frac{m}{2}, \ x_1 x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Apoi :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = -\frac{m}{3};$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{m^2 + 12}{4};$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(\frac{m}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{m}{2} = \frac{m^3 + 18m}{8}.$$

3) Fie ecuaţiile de gradul al II-lea :

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0,$$
$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0.$$

Demonstraţi că ecuaţiile au aceleaşi soluţii dacă şi numai dacă :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Rezolvare. Presupunem că ecuaţiile au aceleaşi soluţii ; fie acestea x_1 şi x_2. Relaţiile lui Viète pentru prima ecuaţie sînt

$$x_1 + x_2 = -\frac{b_1}{a_1}, \ x_1x_2 = \frac{c_1}{a_1},$$

iar pentru a doua ecuaţie sînt :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b_2}{a_2}, \ x_1x_2 = \frac{c_2}{a_2}.$$

Rezultă $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$ şi $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$, de unde, folosind proprietăţile proporţiilor, deducem că :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Reciproc, presupunînd că cele două ecuații au coeficienții proporționali, să notăm cu r valoarea comună a rapoartelor $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ și $\frac{c_1}{c_2}$. Atunci $a_1 = a_2r$, $b_1 = b_2r$ și $c_1 = c_2r$. Evident $r \neq 0$. Astfel ecuațiile sînt echivalente, deoarece prima se obține din a doua prin înmulțirea ambilor membri cu numărul r.

4) Un dreptunghi are aria de 60 cm^2 iar perimetrul de 38 cm. Aflați dimensiunile sale.

Rezolvare. Semiperimetrul dreptunghiului este de 19 cm ; deci dimensiunile L și l ale dreptunghiului au suma 19 și produsul 60. Formăm ecuația de gradul al II-lea ale cărei soluții sînt L și l :

$$\mathbf{x}^2 - 19\mathbf{x} + 60 = 0.$$

Rezolvînd ecuația, găsim $x_1 = 4$ și $x_2 = 15$; deci dimensiunile dreptunghiului sînt : $L = 15$ (cm), $l = 4$ (cm).

EXERCIȚII

1) Calculați suma, produsul și suma pătratelor rădăcinilor polinoamelor :

a) $2X^2 - 4X + 1$; b) $3X^2 - 8X + 5$; c) $-X^2 - 6X - 1$; d) $3X^2 - 36X + 5$; e) $2X^2 - 16X + 19$; f) $-9X^2 + 16X - 27$.

2) Formați ecuații de gradul al II-lea ale căror soluții sînt :

a) 1 și 2 ; b) 4 și 5 ; c) -1 și -3 ; d) -4 și 5 ; e) $\frac{2}{5}$ și $-\frac{1}{3}$; f) -4 și 4 ; g) 3,5 și 5,5 ; h) $7 - \sqrt{3}$ și $7 + \sqrt{3}$; i) $-3 - \sqrt{3}$ și $-3 + \sqrt{3}$; j) $2 + \sqrt{3}$ și $2 - \sqrt{3}$; k) $1 - \sqrt{3}$ și $2\sqrt{3}$.

3) Rezolvați ecuațiile de mai jos, cunoscînd cîte o soluție (scrisă în dreptul fiecăreia). Aflați și coeficientul necunoscut :

a) $\mathbf{x}^2 - m\mathbf{x} + 36 = 0$, $\quad x_1 = 12$;

b) $2\mathbf{x}^2 + m\mathbf{x} - 5 = 0$, $\quad x_1 = 5$;

c) $5\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} + m = 0$, $\quad x_2 = 0{,}6$.

4) Aflați două numere, cunoscînd că au suma 337 iar produsul 8086.

5) Aflați două numere pozitive, știind că media aritmetică a lor este 133,5, iar media geometrică a lor este 120.

6) Aflați dimensiunile unui dreptunghi, cunoscînd că are :

a) perimetrul de 84 m, aria de 185 m^2 ;
b) perimetrul de 108 m, aria de 729 m^2 ;
c) perimetrul de 108 m, aria de 542 m^2.

7) Pentru ce valori ale lui m și n, ecuațiile

$$\mathbf{x}^2 + m\mathbf{x} + 1 = 0,$$

$$2\mathbf{x}^2 - n\mathbf{x} + m = 0$$

sînt echivalente ?

8) Fie ecuaţia $x^2 - \sqrt[3]{2}x - \sqrt[3]{4} = 0$. Calculaţi $x_1^2 + x_2^2$ şi $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$, fără a rezolva ecuaţia.

9* Pot fi echivalente ecuaţiile :

$$mx^2 + (m - 4)x + 4m = 0,$$

$$(3 + m)x^2 + 5(5 + 3m)x + 8 = 0 ?$$

Dacă da, rezolvaţi-le în acest caz.

6. DESCOMPUNEREA ÎN FACTORI A TRINOMULUI DE GRADUL AL II-LEA

Să ne reamintim cîteva exemple de descompuneri în factori ale unor trinoame de gradul al II-lea :

$X^2 + 2X = X(X + 2)$;
$X^2 - 6 = (X + \sqrt{6})(X - \sqrt{6})$;
$X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$;
$X^2 - 4X + 3 = (X - 2)^2 - 1 = (X - 1)(X - 3)$;
$X^2 - 5X + 6 = X^2 - 2X - 3X + 6 = X(X - 2) - 3(X - 2) = (X - 2)(X - 3)$.

Metodele cunoscute se aplică mai greu în cazul în care coeficienţii sînt numere „mari", ca de exemplu în cazul trinomului :

$$41X^2 + 205X - 8364.$$

Formulele lui Viète ne permit să găsim o metodă generală de descompunere în factori a trinomului de gradul al II-lea.

Fie trinomul :

$$P(X) = aX^2 + bX + c,\ a \neq 0.$$

Distingem trei cazuri :

1) Discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$ este < 0. În acest caz orice încercare de descompunere a trinomului în factori de gradul I nu conduce la nici un rezultat. Trinomul este *ireductibil.*

2) $\Delta = 0$. În acest caz trinomul se poate descompune astfel :

$$P(X) = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

deci se poate scrie ca pătrat al unui binom de gradul I.

3) $\Delta > 0$. În acest caz, dacă x_1 şi x_2 sînt rădăcinile trinomului, atunci folosind relaţiile lui Viète obţinem :

$$P(X) = a\left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}\right) = a(X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2) =$$

$$= a(X - x_1)(X - x_2).$$

Aşadar trinomul se descompune ca produs de doi factori de gradul I.

De exemplu, să descompunem în factori trinomul

$$41X^2 + 205X - 8364.$$

Discriminantul său este $\Delta = 205^2 - 4 \cdot 41 \cdot (-8364) = 1\,413\,721$. Deci trinomul se descompune ca produs de doi factori de gradul I.

$$x_{1,2} = \frac{-205 \pm \sqrt{1\,413\,721}}{82} = \frac{-205 \pm 1\,189}{82},$$

$$\text{deci } x_1 = \frac{-205 - 1\,189}{82} = \frac{-1\,394}{82} = -17, \quad x_2 = \frac{-205 + 1\,189}{82} = 12.$$

Rezultă

$$41X^2 + 205X - 8364 = 41(X + 17)(X - 12) = (41X + 697)(X - 12).$$

EXERCIŢII

1) Descompuneţi în factori de gradul I :

a) $X^2 - 13X + 30$; b) $X^2 + 36X + 323$; c) $2X^2 - 5X - 12$; d) $-X^2 + 5X - 4$; e) $X^2 - 2\sqrt{2}X - 5$; f) $X^2 - 4X - 5$; g) $10X^2 - 43X + 12$; h) $X^2 - 2X - 1$; i) $2X^2 - 2\sqrt{2}X - 3$.

2) Simplificaţi fracţiile :

a) $\frac{X^2 + 10X - 39}{2X^2 - 21X + 45}$; b) $\frac{X^2 + X - 12}{2X^2 - X - 15}$; c) $\frac{6X^2 - 5X + 1}{6X^2 + X - 1}$; d) $\frac{X^2 + X - 90}{8X^2 + 83X + 30}$; e) $\frac{3X^2 - 7X + 2}{2X^2 + 5X - 18}$;

f) $\frac{X^2 + 7X - 8}{2X^2 - 3X + 1}$; g) $\frac{2X^2 - 5X - 3}{6X^2 - X - 2}$.

3* Demonstraţi că pentru orice valoare nenulă a parametrului m, trinomul $P(X) = X^2 + 2X + m^2 + 1$ este ireductibil.

7. ECUAŢII CARE SE REZOLVĂ CU AJUTORUL UNOR ECUAŢII DE GRADUL AL II-LEA

Exemplul 1. Să rezolvăm ecuaţia :

$$\frac{x^2 - 6x}{x - 5} = \frac{5}{5 - x}.$$

Nu putem înlocui necunoscuta x prin numărul 5. Fie s o soluţie a ecuaţiei ; înmulţind ambii membrii ai egalităţii $\frac{s^2 - 6s}{s - 5} = \frac{5}{5 - s}$ cu $s - 5$ (care este diferit de 0), obţinem $s^2 - 6s = -5$, sau $s^2 - 6s + 5 = 0$. Deci s este soluţie a ecuaţiei de gradul al II-lea :

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Soluţiile acestei ecuaţii, calculate cu formulele obişnuite, sînt 1 şi 5 ; dar numai prima aparţine mulţimii $\mathbf{R} \setminus \{5\}$. Deci ecuaţia $\frac{x^2 - 6x}{x - 5} = \frac{5}{5 - x}$ are o singură soluţie, anume numărul 1.

Exemplul 2. Să rezolvăm ecuaţia :

$$\sqrt{x} = 6 - x.$$

Să presupunem că numărul s este soluţie a ecuaţiei ; atunci $\sqrt{s} = 6 - s$. Pentru a putea extrage rădăcină pătrată, numărul s trebuie să fie evident ≥ 0. Pe de altă parte, $\sqrt{s}$ este un număr ≥ 0 ; deci $6 - s \geq 0$, adică $s \leq 6$. Aşadar s va trebui să aparţină intervalului $[0 ; 6]$.

Să ridicăm la pătrat egalitatea $\sqrt{s} = 6 - s$; obţinem $s = (6 - s)^2$, sau $s^2 - 13s + 36 = 0$. Aşadar numărul s este soluţie a ecuaţiei de gradul al II-lea

$$x^2 - 13x + 36 = 0.$$

Această ecuaţie de gradul II-lea are ca soluţii numerele 4 şi 9. Dintre acestea, doar 4 aparţine intervalului $[0; 6]$. Putem constata şi prin înlocuire directă că 9 nu verifică ecuaţia $\sqrt{x} = 6 - x$. Deci ecuaţia $\sqrt{x} = 6 - x$ admite o singură soluţie: 4

Ce legătură există între ecuaţia $\sqrt{x} = 6 - x$ şi ecuaţia $x = (6 - x)^2$? A doua se obţine din prima „ridicînd ambii membri la pătrat". Cele două ecuaţii **nu sînt echivalente**. Mulţimea soluţiilor primei ecuaţii este inclusă în mulţimea soluţiilor celei de-a doua, dar nu coincide cu ea.

De ce se întîmplă aşa ? Evident, dacă $u = v$, atunci $u^2 = v^2$; dar reciproca nu este adevărată. Într-adevăr, dacă $u^2 = v^2$, atunci $(u + v)(u - v) = 0$, de unde concluzia „$u = v$ sau $u = -v$". Deci, pentru ca relaţia $u^2 = v^2$ să implice $u = v$, este necesar ca u şi v să aibă acelaşi semn.

Exemplul 3. Fie ecuaţia

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x} = 0.$$

Putem înlocui necunoscuta x cu numere s astfel încît $s - 2 \geq 0$ (primul radical) şi $2 - s \geq 0$ (al doilea radical). Deci $s \geq 2$ şi $s \leq 2$ adică $s = 2$. Necunoscuta x poate lua valori doar în mulţimea $\{2\}$. Observăm că 2 este soluţie a ecuaţiei.

Exemplul 4. Rezolvaţi ecuaţia

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x} = 3.$$

Ca şi exemplul 3, necunoscuta x poate lua valori doar în mulţimea $\{2\}$. Înlocuind în ecuaţie necunoscuta x cu 2, obţinem o propoziţie falsă, deci ecuaţia nu are nici o soluţie.

Exemplul 5. Să rezolvăm ecuaţia

$$\sqrt{x + 2} + \sqrt{11 - x} = 5.$$

Putem înlocui necunoscuta x cu numere s astfel încît $s + 2 \geq 0$ şi $11 - s \geq 0$; deci necunoscuta x poate lua valori doar în intervalul $[-2, 11]$.

Fie s un număr din acest interval ; atunci numărul $\sqrt{s+2} + \sqrt{11-s}$ este pozitiv (ca sumă a doi radicali) ; ecuaţia este deci echivalentă cu :

$$(\sqrt{x+2} + \sqrt{11-x})^2 = 25, \ x \in [-2 ; 11]$$

adică cu :

$$x + 2 + 2\sqrt{(x+2)(11-x)} + 11 - x = 25, \ x \in [-2 ; 11]$$

sau

$$\sqrt{(x+2)(11-x)} = 6, \ x \in [-2 ; 11].$$

Şi această ecuaţie, atît membrul stîng, cît şi cel drept sînt pozitivi ; deci ecuaţia este echivalentă cu ;

$$(x+2)(11-x) = 36, \ x \in [-2 ; 11]$$

sau cu :

$$-x^2 + 9x - 14 = 0, \ x \in [-2 ; 11].$$

Ecuaţia de gradul al II-lea :

$$-x^2 + 9x - 14 = 0, \ x \in \mathbf{R},$$

are două soluţii : 2 şi 7. Amîndouă aparţin intervalului $[-2 ; 11]$, deci sînt soluţii ale ecuaţiei $\sqrt{x+2} + \sqrt{11-x} = 5$.

Exemplul 6. Fie ecuaţia de gradul al IV-lea :

$$x^4 - 27x^2 + 50 = 0.$$

Prin substituţia $y = x^2$ obţinem ecuaţia de gradul al II-lea (în necunoscuta y) ;

$$y^2 - 27y + 50 = 0,$$

ale cărei soluţii sînt 2 şi 25. Deci $x^2 = 2$ sau $x^2 = 25$.

Ecuaţia $x^2 = 2$ are soluţiile $-\sqrt{2}$ şi $\sqrt{2}$, iar ecuaţia $x^2 = 25$ are soluţiile -5 şi 5. Deci ecuaţia de gradul al IV-lea are patru soluţii : -5, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ şi 5.

Exemplul 7. Fie ecuaţia de gradul al IV-lea :

$$4x^4 + 3x^2 - 1 = 0.$$

Substituim (înlocuim) pe x^2 cu y ; obţinem ecuaţia de gradul al II-lea ;

$$4y^2 + 3y - 1 = 0,$$

ale cărei soluţii sînt $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{4}$.

Ecuaţia $x^2 = -1$ nu are soluţii ; ecuaţia $x^2 = \frac{1}{4}$ are soluţiile $-\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{2}$.

Aşadar ecuaţia de gradul al IV-lea

$$4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$$

are două soluţii, numerele $-\frac{1}{2}$ şi $\frac{1}{2}$ (verificaţi !)

Metoda aplicată în cele două exemple de mai sus se poate folosi pentru a rezolva orice ecuaţie de gradul al IV-lea de forma :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

cu $a \neq 0$. O astfel de ecuaţie se numeşte ecuaţie *bipătrată*.

Exemplul 8. Fie ecuaţia :

$$x^2 + x = \frac{4}{x^2 + x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

Să înlocuim pe $x^2 + x$ cu y ; obţinem

$$y = \frac{4}{y},$$

$$y^2 = 4,$$

ecuaţie ce are două soluţii : -2 şi 2.

Ecuaţia $x^2 + x = -2$ nu are soluţii ; ecuaţia $x^2 + x = 2$ are soluţiile -2 şi 1. Aşadar ecuaţia

$$x^2 + x = \frac{4}{x^2 + x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$$

are două soluţii : -2 şi 1.

EXERCIŢII

1) Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6}$; b) $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$; c) $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}$; d) $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x-1} - 1$; e) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = 1$; f) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = 2$.

[2)] Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $\sqrt{x} = x$; b) $\sqrt{x} = x + 1$; c) $\sqrt{x} = -x$; d) $\sqrt{x^2+1} = 2$; e) $\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{x}$; f) $\sqrt{x(x-5)} = 6$; g) $\sqrt{x^2-5x} = x - 3$; h) $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-3} = 7$; i) $\sqrt{3-x} + \sqrt{2-x} = 1$; j) $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-2} = 1$; k) $\frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \frac{1}{3}$; l) $\sqrt{x^2-2x+1} = 5$.

[3)] Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $x^4 - 21x^2 + 110 = 0$; b) $x^4 + 12x^2 + 20 = 0$; c) $x^4 - 12x^2 + 20 = 0$; d) $x^4 - x^2 + 1 = 0$; e) $x^4 - x^2 - 12 = 0$.

8. PROBLEME

Multe probleme de geometrie, fizică, tehnică etc., conduc la ecuaţii de gradul al doilea.

Formule ca $A = \pi r^2$ (aria cercului de rază r), $V = \pi r^2 h$ (volumul cilindrului circular de rază r şi înălţime h), $P = I^2 R$ (puterea în funcţie de intensitate şi rezistenţă) devin ecuaţii de gradul al II-lea atunci cînd necunoscuta este r respectiv I. Să rezolvăm cîteva probleme care conduc la ecuaţii de gradul al II-lea.

Problema 1. Fie ABC un triunghi. Determinaţi pe segmentul BC (de lungime a) un punct M astfel încît ducînd paralela MN la latura AB, aria trapezului ABMN să fie de 4 ori mai mare decît aria triunghiului MNC (vezi figura 1).

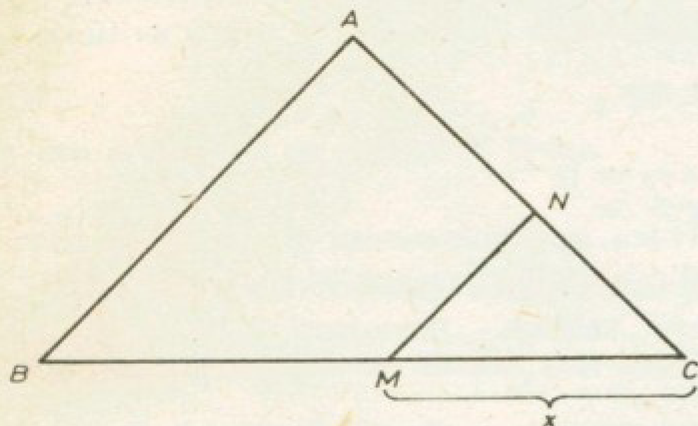


Fig. IV.1

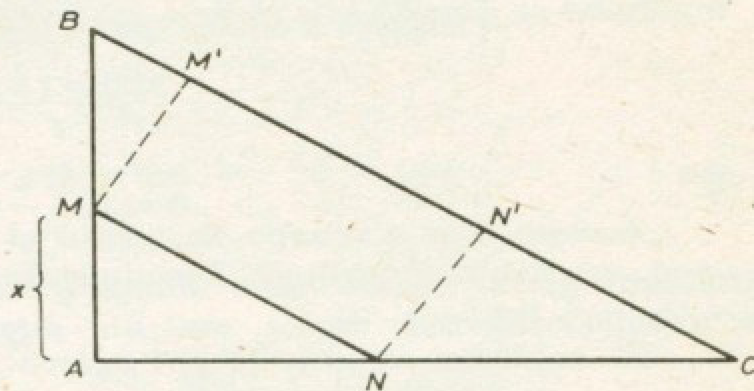


Fig. IV.2

Rezolvare. Să notăm cu x lungimea segmentului CM. Faptul că punctul M aparţine segmentului BC impune condiţia $0 \leq x \leq a$.

Din faptul că $S_{ABMN} = 4 \cdot S_{MNC}$ rezultă că $S_{ABC} = S_{ABMN} + S_{MNC} = 5 \cdot S_{MNC}$.

Însă cele două triunghiuri sînt asemenea; deci raportul ariilor lor este pătratul raportului de asemănare :

$$\frac{S_{ABMN}}{S_{MNC}} = \left(\frac{BC}{MC}\right)^2.$$

Obţinem astfel ecuaţia : $\left(\frac{a}{x}\right)^2 = 5$; rezolvînd-o, găsim că are două soluţii :

$x_1 = -\frac{a}{\sqrt{5}}$ şi $x_2 = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Prima soluţie nu corespunde (nu aparţine intervalului $[0; a]$). Poziţia punctului M trebuie aleasă deci în aşa fel încît $MC = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Problema 2. O paralelă la ipotenuza unui triunghi dreptunghic ABC taie laturile AB, AC în punctele M, respectiv N. Construim perpendicularele MM′, NN′ pe BC (vezi figura 2). Determinaţi poziţia punctului M astfel încît aria dreptunghiului MNN′M′ să fie s.

Rezolvare. Fie x lungimea segmentului AM ; evident $0 \leq x \leq c$.

Segmentul MB are lungimea $c - x$. Din asemănarea triunghiurilor BMM′

şi ABC obţinem $\frac{c-x}{MM'}=\frac{a}{b}$, adică lungimea segmentului MM′ este $\frac{b(c-x)}{a}$.

Din asemănarea triunghiurilor AMN şi ABC obţinem $\frac{x}{c}=\frac{MN}{a}$, adică lungimea segmentului MN este $\frac{ax}{c}$.

Aşadar aria dreptunghiului MNN′M′ este $\frac{b(c-x)}{a}\cdot\frac{ax}{c}=\frac{b(c-x)x}{c}$. Impunînd ca această arie să fie s, obţinem ecuaţia :

$$\frac{b(c-\mathbf{x})\mathbf{x}}{c}=s,$$

sau :

$$b\mathbf{x}^2-bc\mathbf{x}+cs=0.$$

Aceasta este o ecuaţie de gradul al II-lea în necunoscuta $\mathbf{x}$; ea poate avea două, una sau nici o soluţie. Discriminantul ecuaţiei se scrie $\Delta=(bc)^2-4b\cdot cs=(bc-4s)bc$.

Să analizăm cazurile ce pot apărea. Vom ţine seamă de faptul că $b, c>0$

Cazul 1. Dacă $s>\frac{bc}{4}$ (adică o jumătate din aria triunghiului ABC !), ecuaţia nu are soluţii.

Cazul 2. Dacă $s=\frac{bc}{4}$, ecuaţia are o singură soluţie : $x=\frac{c}{2}$. Ce poziţie are punctul M în acest caz ?

Cazul 1. Dacă $0\le s<\frac{bc}{4}$, ecuaţia are două soluţii :

$$x_1=\frac{bc-\sqrt{bc(bc-4s)}}{2b},\quad x=\frac{bc+\sqrt{bc(bc-4s)}}{2b}.$$

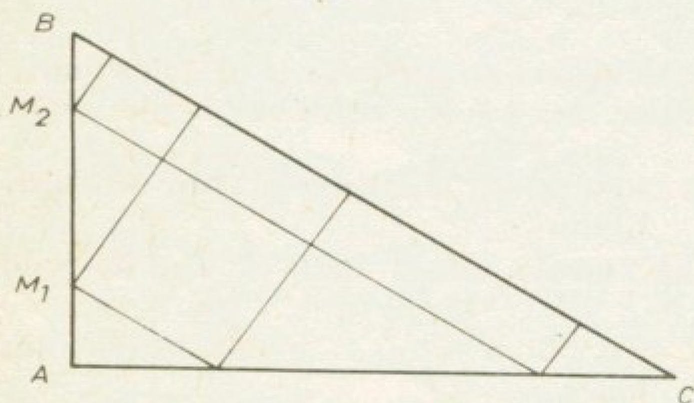


Fig. IV.3

Amîndouă corespund unor soluţii ale problemei : punctele M_1 şi M_2 (vezi figura 3).

Cazul 4. Dacă $s<0$, ecuaţia încă are două soluţii x_1 şi x_2, dar ele nu corespund vreunei soluţii a problemei. Problema nu are soluţie (aria nu poate fi negativă !).

Problema 3. Aflaţi laturile unui triunghi dreptunghic, ştiind că sînt numere naturale consecutive.

Rezolvare. Fie x, $x+1$, $x+2$ lungimile laturilor triunghiului, ipotenuza

avînd lungimea $x + 2$. Să aplicăm teorema lui Pitagora : $(x + 2)^2 = x^2 + (x + 1)^2$. Rezolvînd această ecuaţie, obţinem $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Prima soluţie a ecuaţiei nu convine (nu este număr natural !). Problema are o singură soluţie : triunghiul cu laturile de lungimi 3, 4 şi 5.

Problema 4. Demonstraţi că nu există două numere întregi consecutive al căror produs să fie 588.

Rezolvare. Să presupunem prin absurd că produsul numerelor întregi consecutive x şi $x + 1$ este 588. Deci numărul x este soluţie a ecuaţiei :

$$x(x + 1) = 588,$$

sau a ecuaţiei de gradul al II-lea

$$x^2 + x - 588 = 0.$$

Discriminantul acestei ecuaţii nu este pătratul unui număr întreg (numărul $\sqrt{2353}$ este iraţional). Aşadar ecuaţia nu are soluţii întregi. Obţinem o contradicţie.

Problema 5. Două autocamioane pleacă în acelaşi moment într-o cursă de 440 km ; primul, circulă cu o viteză mai mare cu 15 km/h decît viteza celui de-al doilea. Aflaţi vitezele medii cu care au circulat, ştiind că al doilea autocamion a sosit la trei ore după primul.

Rezolvare. Să notăm cu x şi y vitezele celor două autocamioane. Relaţia $x = y + 15$ este imediată. Durata călătoriei primului este de $\frac{440}{x} = \frac{440}{y + 15}$ ore, iar a celui de-al doilea de $\frac{440}{y}$ ore. Obţinem ecuaţia :

$$\frac{440}{y + 15} + 3 = \frac{440}{y}.$$

Rezolvarea acestei ecuaţii se reduce la rezolvarea ecuaţiei de gradul al II-lea :

$$y^2 + 15y - 2200 = 0,$$

ale cărei soluţii sînt $y_1 = -55$, $y_2 = 40$.

Prima soluţie nu convine (viteza nu poate fi negativă !). Vitezele celor două autocamioane au fost de 40 şi respectiv 55 km/h.

Problema 6. Un tablou are dimensiunile de 30 cm şi 40 cm. Tabloul împreună cu rama are o suprafaţă de 2184 cm^2. Aflaţi lăţimea ramei.

Rezolvare. Fie x (cm) lăţimea ramei ; atunci tabloul înrămat are forma unui dreptunghi cu lungimea de $40 + 2x$ cm şi lăţimea de $30 + 2x$ cm, adică avînd suprafaţa de $(2x + 40)(2x + 30)$ cm^2. Obţinem lăţimea x a ramei rezolvînd ecuaţia :

$$(2x + 40)(2x + 30) = 2184.$$

Acceptăm o singură soluţie : $x = 6$ cm.

Problema 7. Doi conductori electrici legaţi în serie au rezistenţa de 15 ohmi, iar legaţi în paralel au rezistenţa de 3 ohmi. Aflaţi rezistenţa fiecărui conductor.

Rezolvare. Se ştie că după legarea în serie a doi rezistori ce au rezistenţele x (ohmi), respectiv y (ohmi), ansamblul lor are rezistenţa $x + y$ (ohmi) ; după legarea în paralel, ansamblul are rezistenţa $\frac{xy}{x+y}$, adică $\frac{xy}{15}$ ohmi. Cunoscînd suma şi produsul numerelor x şi y, le putem afla rezolvînd ecuaţia de gradul al II-lea

$$R^2 - 15R + 45 = 0.$$

Cele două rezistenţe sînt de aproximativ 4,1 respectiv 10,9 ohmi.

Problema 8. O lege a fizicii afirmă că un corp aruncat pe verticală (în sus), cu viteza iniţială v m/s, se va afla după t secunde de la aruncare la înălţimea $h(t) = vt - \frac{g}{2}t^2$; în această formulă g este „acceleraţia gravitaţională" determinată de atracţia Pămîntului ; valoarea ei este de aproximativ 10 m/s^2. Aflaţi după cît timp de la aruncare corpul se va afla la înălţimea de 100 m, dacă a fost aruncat cu viteza iniţială de 45 m/s.

Rezolvare. Va trebui să rezolvăm ecuaţia :

$$100 = 45t - 5t^2$$

în necunoscuta t ; obţinem soluţiile $t_1 = 4$ şi $t_2 = 5$. Deci corpul se va afla de două ori la înălţimea de 100 m : prima dată, în urcare, după 4 secunde de la aruncare ; a doua oară, în coborîre, după 5 secunde de la aruncare.

PROBLEME

1) Dintr-un punct aflat la 50 m de centrul unui cerc se trazează tangentele la acest cerc. Aflaţi distanţele pînă la punctele de tangenţă, ştiind că raza cercului este de 30 m.

2) Dimensiunile unui dreptunghi de arie 6320 cm^2 sînt exprimate prin două numere naturale consecutive. Aflaţi aceste dimensiuni.

3) Orice patrulater are 2 diagonale. Orice pentagon are 5 diagonale. Orice exagon are 9 diagonale. Puteţi stabili cîte diagonale are un poligon cu n laturi ? Cîte laturi are un poligon ce are un număr de 170 de diagonale ?

4) Aflaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a\ ;\ a)$ aparţine graficului funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + x - 12$.

5) Intr-un apartament, două camere au aceeaşi suprafaţă, anume de 16 m^2. Una dintre camere are lungimea cu 1 m mai mare, iar lăţimea cu 0,8 m mai mică decît cealaltă. Aflaţi dimensiunile fiecărei camere.

6) Aflaţi rezistenţele a doi rezistori, ştiind că legaţi în serie au rezistenţa totală de 20 ohmi, iar legaţi în paralel au rezistenţa de 4,8 ohmi.

7) Dintr-o bucată dreptunghiulară de tablă zincată, avînd suprafaţa de 8000 cm^2 s-a tăiat o bucată de 1600 cm^2. Aflaţi dimensiunile bucăţii iniţiale, ştiind că bucata rămasă are forma unui pătrat.

LUCRĂRI PENTRU VERIFICAREA ÎNSUȘIRII UNOR CUNOȘTINȚE DE BAZĂ

LUCRAREA I

1) Rezolvați ecuațiile :

$x^2 - 14x = 0$; $4x^2 - 1 = 0$; $x^2 - 17x + 42 = 0$; $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

2) Găsiți rădăcinile trinoamelor :

$X^2 + 13X - 30$; $2X^2 - 3X + 0{,}5$.

3) Formați ecuațiile de gradul al II-lea ale căror soluții sînt :

5 și -8 ; 7 și -7 ; 3 și 18 ; 4 și 0.

LUCRAREA a II-a

1) Descompuneți în factori ireductibili trinoamele :

$$X^2 + 17X + 72 ;\ 2X^2 - 27X + 13.$$

2) Simplificați fracțiile :

$$\frac{4X^2 - 1}{2X^2 - 3X + 1} ; \quad \frac{4X^2 - 5X + 1}{5X^2 - 4X + 1}$$

3) Produsul a două numere întregi consecutive este 210. Aflați numerele.

4) Două numere au suma 13,7 iar produsul 46,8. Aflați numerele.

CAPITOLUL V

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. EXERCIŢII ŞI PROBLEME SUPLIMENTARE

1) Ştim că $\frac{1}{t} = -1{,}024$. Care este inversul lui $-t$?

2) Fie numărul $u = \frac{2{,}2}{1{,}5}$. Scrieţi pe u^{-1}, u^2, u^{-2} sub formă de fracţie.

3) Fie $v = \frac{1{,}6}{3{,}5}$ şi $u = \frac{4{,}1}{-2{,}6}$. Scrieţi pe $\frac{u}{v}$, apoi pe $\frac{v}{u}$ sub formă de fracţie.

4) Aflaţi numărul întreg m care îndeplineşte condiţia :

$$\text{a) } 2^{m-1} \le \frac{2}{23} < 2^m; \quad \text{b) } 3^m \le \frac{3}{49} < 3^{m+1};$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{2}\right)^m \le \frac{2}{65} < \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}.$$

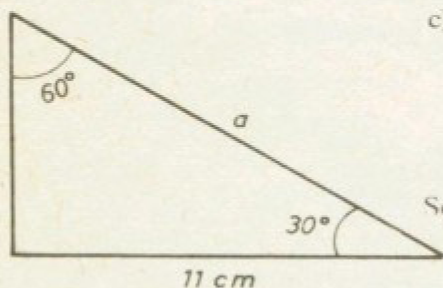


Fig. V.1

5) Calculaţi : $\frac{5{,}23 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^{-2}} = \frac{4{,}46 \cdot 10^{-1}}{3{,}14 \cdot 10^3}$; $18{,}5 \cdot 0{,}96$.

Scrieţi rezultatele obţinute în formă standard.

6) Aflaţi lungimea a (vezi fig. 1).

7) Triunghiurile dreptunghice din figura 2 sînt asemenea. Aflaţi a, b şi c.

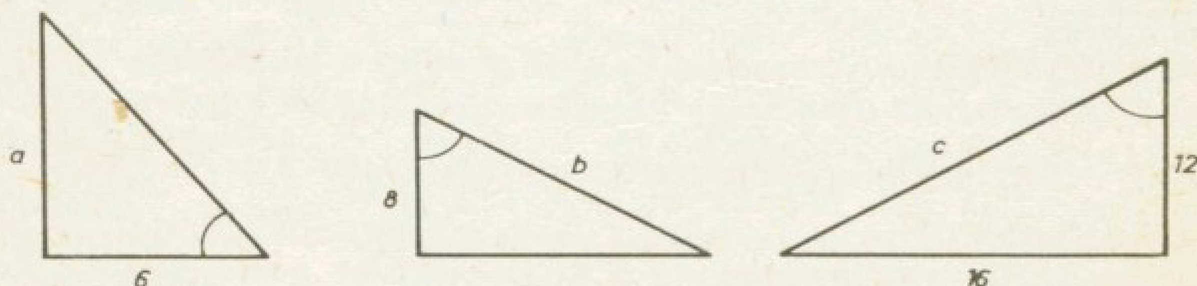


Fig. V.2

8) Estimaţi aria haşurată din figura 3, ştiind că : $1{,}6 < r < 1{,}7$.

9) Razele a două cercuri sînt de 5 cm, respectiv 3 cm. Aflaţi raza cercului a cărui arie este egală cu suma ariilor celor două cercuri.

10) Comparați numerele $4\sqrt{3}$ și $5\sqrt{2}$. Ce semn are diferența $4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$? Ce semn are diferența $14 - 4\sqrt{11}$?

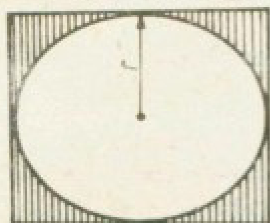


Fig. V.3

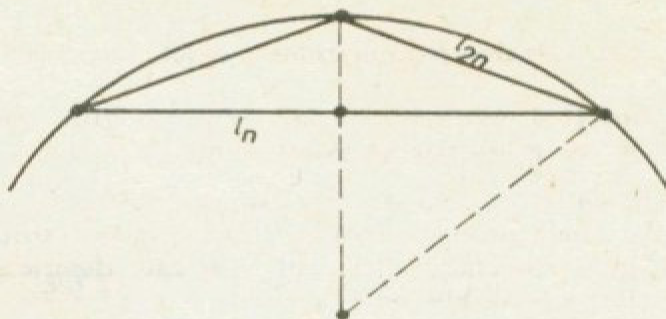


Fig. V.4

11) Simplificați :

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

12) Calculați $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ și $\sqrt{\sqrt[3]{1296}}$. Calculați apoi $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ și $\sqrt[3]{\sqrt{1296}}$. Ce observați ?

13) Știind că pătratul înscris în cercul de rază 1 are laturile de lungime $\sqrt{2}$, aflați lungimea laturii octogonului regulat înscris în cercul de rază 1.

14*) Fie l_n lungimea laturii poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul de rază 1. Aflați l_{2n} în funcție de l_n (vezi figura 4).

15) Planeta Jupiter este de 5,203 ori mai depărtată de Soare decît Pămîntul și are diametrul de 11,06 ori mai mare decît diametrul Pămîntului. Aflați distanța de la Soare la Jupiter, apoi volumul planetei Jupiter. Știm că raza medie a Pămîntului este de 6 300 km.

16) Ce valoare trebuie să aibă rezistorul R din circuitul desenat în figura 5 pentru ca rezistența totală a circuitului să fie de 3kΩ ? Cu ce ar putea fi înlocuit circuitul în acest caz ?

17) Ce valoare trebuie să aibă rezistorul R din circuitul din figura 6 pentru ca rezistența totală a circuitului să fie de 1 kΩ ?

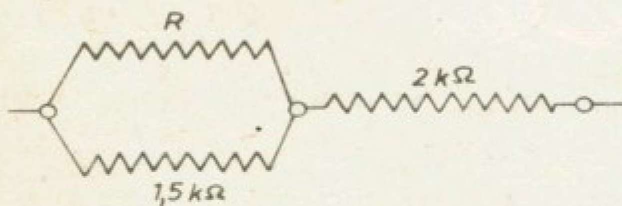


Fig. V.5

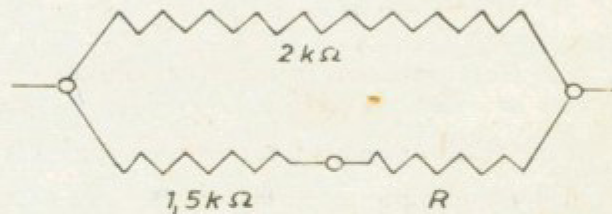


Fig. V.6

18) Rezolvați sistemul :

$$\begin{cases} 6751x + 3249y = 26751 \\ 3249x + 6751y = 23249. \end{cases}$$

19) Determinați valoarea parametrului m astfel încît 1 să fie soluție a ecuației :

$$(2x + m)(2x - 5) - (2x + 1)^2 = 6.$$

20) Rezolvaţi ecuaţia :

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+2} - \frac{1}{3x+3} = \frac{1}{6x+6} = 0.$$

21) Aflaţi valoarea parametrului a astfel încît ecuaţia $(4-x)^2 - ax + \frac{12}{x} = 0$ să admită soluţia 2.

22) Împărţind numărul a la 113, obţinem cîtul c şi restul 11. Împărţind numărul a la 108, cîtul este din nou c, dar restul este 41. Aflaţi numerele a şi c.

23) Exercitînd o forţă de f N asupra unui resort, el îşi măreşte lungimea cu $l(f)$ cm. Ştiind că alungirea este direct proporţională cu forţa şi că la o forţă de 60 N corespunde o alungire de 24 mm, reprezentaţi grafic funcţia $l : [0 ; 80] \to \mathbf{R}$ care descrie dependenţa alungirii de forţă. Ce forţă provoacă o alungire a resortului de 14 mm ?

24) Două automobile pleacă în acelaşi moment unul spre celălalt din localităţile A şi B situate la distanţa de 440 km. Viteza automobililui care pleacă din A este de 60 km/h, iar a celui care pleacă din B de 50 km/h. Exprimaţi distanţa dintre cele două automobile în funcţie de timpul t scurs începînd cu momentul plecării ; luaţi $t \in [0 ; T]$, unde cu T notăm timpul necesar automobilului plecat din B pentru a ajunge la destinaţie.

25) Care număr trebuie adunat împreună cu 15, 21, şi 18, astfel încît să le ridice media aritmetică cu 1,5 ?

26) Determinaţi valorile lui m şi n, ştiind că polinoamele $P(X, Y) = 5X^2Y + mXY^2 - XY^2 + 2XY$ şi $Q(X, Y) = -X^2Y + 3XY^2 + 2XY + nX^2Y$ au aceeaşi formă canonică.

27) Fie $Q(X) = 4X^3 - 8X^2 - 9X + 18$. Calculaţi $Q(2)$. Descompuneţi în factori.

28) Fiind date polinoamele $P(X) = X^3 - 2aX + a^2$ şi $Q(X) = X^2 - (3a+1)X + a^2$, determinaţi valoarea lui a astfel încît $P(2) = Q(2)$.

29) Arătaţi că polinomul $P_n(X) = X^n - a^n$ se divide cu $X - a$, oricare ar fi $n \geq 1$, $n \in \mathbf{N}$. Puteţi afla cîtul ?

30) Arătaţi că dacă $P(1+x) = P(1-x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, atunci polinomul $P(X) = X^2 + aX + 1$ este pătratul unui binom.

31) Determinaţi a, b, c ştiind că polinomul :

$P(X) = 2X(aX + b) - 3X(bX + 2c) + c(X^2 + 1) + a(X - 1) + b$ are forma canonică $3X^2 - 7X + 2$.

32*) Determinaţi a, b, c astfel încît polinomul $P(X) = 12X^3 - 40X^2 + 27X - 5$ să poată fi scris sub forma $P(X) = (3X - 1)(aX^2 + bX + c)$.

33) Descompuneţi în factori polinoamele : $P(X) = 2X^2 - 4X + 2$, $Q(X, Y) = XY + 2 - 2X - Y$, $R(X, Y) = -XY^2 + X^2Y^2 + Y - XY$, apoi polinomul $S(X, Y) = P(X) - Q(X, Y) - R(X, Y)$.

34) Descompuneţi în factori polinomul $X^3 - 6X^2Y + 12XY^2 - 8Y^3$.

35) Descompuneţi în factori $P(X, Y) = X^2 + XY + 2Y + 4$.

36) Descompuneţi în factori ireductibili polinomul $P(X) = (X^3 - 5X^2 + 4X)(X^2 + 7X + 12)$.

37*) Fie polinoamele $P(X) = X^3 + 4X^2 - a$, $Q(X) = X^2 - X - 2$. Determinaţi valoarea lui a astfel încît cel mai mare divizor comun al polinoamelor P şi Q să fie un polinom de gradul I. Am putea cere ca acest cel mai mare divizor comun să fie de gradul II ?

38) Pentru ce valori ale lui s, trinomul $X^2 + sX + 36$ este produsul binoamelor a) $X - 3$ şi $X - 12$; b) $X + 4$ şi $X + 5$ şi $X - 5$?

39) Simplificaţi fracţiile raţionale :

a) $\frac{5X^2 - 4X - 1}{5X - 5}$; b) $\frac{Y^2 - 2Y - 3}{Y^2 - 9}$; c) $\frac{5Y + 10}{2Y^2 + 13Y + 18}$; d) $\frac{5X^2 - 11X + 2}{X - 2}$.

40) Simplificați

a) $\frac{6XZ - 4YZ - 21X + 14Y}{3X - 2Y}$; b) $\frac{X^2Y - XY + Y - X^2 + X - 1}{XY - X}$;

c) $\frac{2X^2 + 16X - 18}{X^2 + 5X - 6}$; d) $\frac{X^4 + 2X^3 + 5X^2 + 4X - 12}{X^3 + 4X^2 + X - 6}$.

41) Simplificați :

a) $\frac{(X^2 - 1)(X^2 - 3) + 1}{(X^2 - 1)(X^2 - 4) + 2}$; b) $\frac{(X^2 + X)(X^2 + X + 1) - 2}{(X^2 + X)(X^2 + X + 3) + 2}$.

42) Efectuați :

a) $\frac{1}{(X - 2)^2} - \frac{1}{(X + 2)^2}$; b) $\frac{8X}{X^2 - 16} + \frac{4}{X - 4}$; c) $\frac{2X - Y}{X^2 + XY} + \frac{1}{X - Y} + \frac{1}{X}$;

d) $\frac{X^2 + Y^2}{XY} - \frac{X^2}{XY - Y^2} - \frac{Y^2}{XY + X^2}$; e) $\frac{X + Y + Z}{YZ} + \frac{-X + Y + Z}{XY} + \frac{-X + Y - Z}{XZ}$.

43) Efectuați înmulțirile :

a) $\frac{2X + 1}{X + 1} \cdot \frac{1 - X^2}{1 - 4X^2}$; b) $\frac{16X^2 - 25}{(2X + 3)^2} \cdot \frac{6X + 9}{4X - 5}$; c) $\frac{2(X^2 - Y^2)}{3X} \cdot \frac{6X^2}{4(X - Y)}$.

44) Efectuați împărțirile :

a) $\frac{X^2 - 9Y^2}{XY} : \frac{(X + 3Y)^2}{X^2}$; b) $\frac{X^2 - Y^2}{X^2 + 2XY + Y^2} : \frac{X - Y}{X + Y}$; c) $\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y}\right) : \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{Y}\right)$.

45) Scrieți ca fracție rațională, apoi simplificați :

a) $\dfrac{\dfrac{(2X + 5)(X + 2)}{16X^2 - 9}}{\dfrac{4X + 10}{4 - 3X}}$; b) $\dfrac{\dfrac{X + 1}{X - 1} - 1}{\dfrac{X + 1}{X - 1} + 1}$; c) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{X}{Y + Z}} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{Y}{X + Z}} +$

$+ \dfrac{1}{1 + \dfrac{Z}{X + Y}}$.

46) Dacă $2X^2 + 3X - 5 = (X - a)(2X - b)$, atunci : a) $a = -1, b = -1$; b) $a = 1, b = 5$; c) $a = 1, b = -5$. Cum este corect ?

47) Rezolvați ecuațiile :

a) $x^2 - 0{,}4x - 0{,}12 = 0$; b) $7x^2 + 25x - 12 = 0$; c) $(3 - 2x)^2 - 36 = 0$; d) $8x^2 - 6x + 1 = 0$; e) $x^2 - x - 1 = 0$.

48) Fie polinomul $X^3 - 3X^2 + 2X$. Puteți găsi un număr real a astfel încît valorile polinomului în $a - 1$ și a să fie egale ?

49) Formați o ecuație de gradul al II-lea ce are ca soluții pe :

a) $\frac{3}{4}$ și $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{4}$ și $-\frac{2}{3}$; c) $\frac{2}{11}$ și $-\frac{9}{11}$; d) $4 - \sqrt{17}$ și $4 + \sqrt{17}$.

50) Formați o ecuație de gradul al II-lea ce are soluțiile :

a) $a + b$ și $a - b$; b) $a + b$ și $\frac{1}{a + b}$; c) $\frac{a + b}{a}$ și $\frac{a - b}{b}$.

51) Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, despre care știm că are soluțiile x_1 și x_2. Formați ecuația de gradul al II-lea ce are ca soluții pe : a) $-x_1$ și $-x_2$; b) $2x_1$ și $2x_2$; c) $x_1 + 2$ și $x_2 + 2$; d) $\frac{1}{x_1}$ și $\frac{1}{x_2}$.

52) În ecuația $x^2 - mx + 36 = 0$, determinați pe m astfel încît $x_2 = x_1$, apoi astfel încît $x_2 = -x_1$.

53) În ecuaţia $x^2 - 8x + m = 0$, determinaţi pe m astfel încît :

a) $x_2 = 3x_1$; b) $x_2 = -\frac{1}{x_1}$; c) $3x_1 - 4x_2 = 3$.

54) Arătaţi că ecuaţia $\frac{4 + x}{1 + x} - \frac{1 + x}{4 + x} = m$ are cel puţin o rădăcină reală, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$.

55) Fie ecuaţia $x^2 - 10x + m + 3 = 0$. Care este cea mai mare valoare a lui m pentru care ecuaţia are soluţii ? Rezolvaţi-o în acest caz.

56) Ştim că graficul funcţiei $f(x) = ax + b - a^2$ trece prin punctele $A(1 ; 1)$ şi $B(3 ; 1)$. Trece oare acest grafic şi prin punctul $C(4 ; 5)$?

57) Fie propoziţiile :

a) $(2x + 3)^2 = 16$; b) $(2x + 3)^2 = 2x(2x + 6) + 8$; c) $(2x + 3)^2 = 2x(2x + 6) + 9$; d) $2(x + 1)(2x + 4) = (2x + 3)^2$. Una este întotdeauna adevărată, alta ete adevărată doar pentru două valori ale lui x. Indicaţi-le !

58) Numerele a, b şi c sînt diferite între ele. Poate avea ecuaţia $(x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2 = 0$ soluţii reale ? Scrieţi ecuaţia de gradul al II-lea echivalentă cu ea. Arătaţi apoi că $(a + b + c)^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2)$ şi că $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$.

59) Rezolvaţi ecuaţiile :

a) $(x + 1)^2 = 10 + 2x$; b) $(x + 5)^2 = 3(x + 2)^2 + 13$; c) $(9 + x)(7 - x) + (9 - x)(7 + x) = 100$; d) $\frac{4x - 3}{x - 4} = x + 12$; e) $\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{12}$.

60) Rezolvaţi ecuaţiile (în care m este un parametru real) :

a) $x^2 - 3mx - 4m^2 = 0$; b) $x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$; c) $x^2 - 4m^2 = 9 - 12m$; d) $\frac{x - m}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - m} + 2 = 0$;

61) Rezolvaţi ecuaţiile:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; b) $25x^4 - 20x^2 + 4 = 0$; c) $x^4 - x^2 - 12 = 0$; d) $6x + \sqrt{24x + 40} = 70$; e) $x + \sqrt{x} = 12$; f) $\sqrt{x - 4} = x - 4$.

62) Arătaţi că oricare ar fi m, n, p cu $m \neq n$, ecuaţia

$$(m - n)x^2 + 2(n - p)x + p - m = 0$$

are soluţii. Ce se întîmplă dacă $m = n$?

63) Fie ecuaţiile

$$ax^2 + 3x + a^2 + 1 = 0 \text{ şi } ax^2 + 2x + a^2 + 2 = 0.$$

Arătaţi că dacă ecuaţiile au o soluţie comună, atunci această soluţie este 1. Rezolvaţi ecuaţiile în acest caz, dacă este posibil.

64) La un turneu de şah, fiecare participant a jucat o partidă cu toţi ceilalţi. Ştiind că au avut loc 45 partide, aflaţi numărul participanţilor.

65) În arhivă filmele se păstrează în interiorul unor cutii metalice cu diametrul de 30 cm, înfăşurîndu-se pe role avînd diametrul de 3 cm. Ce lungime poate avea o peliculă de film pantru a încăpea, înfăşurată, într-o cutie ? Grosimea peliculei este de 0,1 mm.

66) Decupaţi, dintr-o bucată de tablă triunghiulară, o bucată dreptunghiulară de arie maximă.

2. EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

1) Calculați : a) $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + ... + (-1)^{99} + (-1)^{100}$; b) $(-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot ... \cdot (-1)^{99} \cdot (-1)^{100}$

2) Rezolvați ecuația :

$$(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + ... + (x + 100) = 15050.$$

3) Arătați că numerele $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ și $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ sînt mai mici decît 2.

4) O tonă de nisip umed ocupă un volum de 0,2 m^3, iar o tonă de pietriș ocupă un volum de 240 dm^3. Un autocamion este încărcat cu 3m^3 de nisip umed, iar alt autocamion cu pietriș, cîntărind cu 4q mai puțin decît nisipul din primul autocamion. Care autocamion transportă un volum mai mare de materiale de construcție ?

5) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, numerele $2^n \cdot 5^{n+1} + 1$ și $2^{n+1} \cdot 5^n + 1$ nu sînt prime.

6) Pentru confecționarea unei cămăși cu mînecă lungă se folosesc 2 m de pînză, iar pentru o cămașă cu mînecă scurtă doar 1,5 m de pînză. Un croitor are o bucată de pînză de 53 m din care vrea să confecționeze cît mai multe cămăși. Cum trebuie folosită bucata de pînză, astfel încît să nu rămînă material nefolosit ? Dar dacă este permis să rămînă un rest de material nefolosit ?

7) Cîte numere naturale de 4 cifre au cifra miilor egală cu 6 iar cifra zecilor egală cu 3 ? Cîte dintre acestea sînt divizibile cu 2 ? Dar cu 9 ? Dar cu 4 ?

8) Găsiți toate numerele naturale de 4 cifre care sînt divizibile cu toate numerele naturale mai mari decît 2 și mai mici decît 21.

9) Dați exemple de perechi de numere reale a și b pentru care : a) $|a + b| = |a| + |b|$; b) $|a + b| = |a| - |b|$; c) $|a - b| = |a| - |b|$.

10*) a) Numerele naturale x, y și z sînt numite *pitagoreice* dacă $x^2 + y^2 = z^2$. Găsiți tripletele de numere pitagorice ce au una dintre componente numărul 4.

b) Suma a 7 numere naturale consecutive este 126. Care sînt numerele ?

c) Suma a x numere naturale consecutive este $22x + 2$; care sînt numerele ?

11) În magazia unei uzine se află oțel de două tipuri : unul conține 5% nichel, iar celălalt, 25% nichel. Din aceste două tipuri de oțel trebuie să se obțină un aliaj care să conțină cel puțin 10% nichel și cel mult 15% nichel. Între ce valori trebuie să fie cuprins raportul cantităților de oțel ce intră în aliaj ?

12) Un pieton pleacă din localitatea A la ora 9 și 15 minute și ajunge în localitatea B la ora 10 și 6 minute. La ce oră trebuie să plece din A un biciclist a cărui viteză este de 3 ori mai mare decît viteza pietonului, pentru a ajunge în B înaintea acestuia ?

13) Media aritmetică a 80 de numere este 47,5. Două dintre numere sînt 101, respectiv 43. Aflați media aritmetică a celorlalte 78 numere.

14) O conductă poate umple rezervoarele unui petrolier în 15 ore, o alta în 20 de ore, iar o a treia în 30 de ore. Aflați în cît timp pot fi umplute rezervoarele petrolierului dacă toate conductele sînt deschise simultan.

15) Un grup de tineri face o plimbare cu o barcă cu motor, pe un lac, parcurgînd $2a$ km. A doua zi, cu aceeași barcă, grupul face o plimbare pe un rîu, parcurgînd a km, apoi se întoarce imediat înapoi. Aflați care plimbare a durat mai mult timp.

16) Directorul unei întreprinderi află de existența a două inovații. Una determină o creștere a productivității muncii cu 10%, iar a doua cu 20%. Directorul apreciază că prin aplicarea simultană a celor două inovații productivitatea muncii va crește.

Cu cît va crește productivitatea muncii ?

17) Două cercuri exterioare unul altuia sînt situate în interiorul unui al treilea cerc, mai mare. Fiecare dintre aceste cercuri este tangent celorlalte două iar cele trei centre sînt pe o aceeași dreaptă. Aflați aria interioară cercului mare dar exterioară celor două cercuri mici. Se cunosc razele celor două cercuri mici.

18) Găsiți o funcție al cărei grafic să fie segmentul AB, unde $A(2\ ;\ -5)$ și $B(5\ ;\ 2)$.

19) Demonstrați că triunghiul ale cărui laturi satisfac relația $\frac{c-b}{a} + \frac{a-c}{b} + \frac{b-a}{c} = 0$ este isoscel.

20) Calculați : $(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2\ ;\ (\sqrt{3}+1)^4 + (\sqrt{3}-1)^4\ ;\ (\sqrt{3}+1)^8 + (\sqrt{3}-1)^8$.

21) Descompuneți în factori polinomul :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(X+Y)(X+Z)(Y+Z).$$

22) Efectuați :

$$\frac{(-1)^n}{X+Y-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{X-Y+1},\ n \in \mathbf{N}.$$

23) Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ descrisă de $f(x) = x^2$. Arătați că oricare ar fi numerele reale a și b, avem :

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

24) Știm că $5a^2 - 13ab + 6b^2 = 0$. Aflați raportul $\frac{a}{b}$.

25*) Demonstrați că dintre toate dreptunghiurile cu același perimetru, pătratul are aria cea mai mare.

26) Un poligon are 4850 de diagonale. Cîte laturi are poligonul ?

27) Rezolvați sistemele :

a) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0{,}7 \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 0{,}5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -6 \\ 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -7 \end{cases}$; c) $\begin{cases} |x| + 3y = -1 \\ 2|x| + y = 3 \end{cases}$.

28*) Pe ecranul unui automat de examinare a cunoștințelor apar 5 întrebări, la care Ionică trebuie să răspundă prin „da" sau „nu". Știm că : a) prima și ultima întrebare au răspunsurile contrare ; b) a doua și a patra au același răspuns ; c) sau prima, sau a doua întrebare are răspunsul „da" ; d) dacă răspunsul la a patra este „da", atunci răspunsul la a cincea întrebare este „nu" ; e) la a treia întrebare răspunsul este „da". Ce răspunsuri trebuie să dea Ionică pentru a obține nota 10 ?

3. PROBLEME DEOSEBITE ȘI CURIOZITĂȚI

1) Priviți :

$$\frac{1}{2} + \frac{38}{76} + 49 + 50 = 100$$

$$74 + 25 + \frac{3}{6} + \frac{9}{18} = 100.$$

Puteţi scrie numărul 100 folosind, la fel ca mai sus, doar o singură dată fiecare cifră, astfel încît în scriere să apară şi radicali ?

2) Fie numerele naturale impare 1, 3, 5 şi 7. Calculaţi suma lor. Calculaţi suma numerelor 1, 3, 5, 7, 9, 11, apoi suma numerelor 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Ce observaţi ? Puteţi spune care este suma numerelor 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, fără a efectua adunările ?

3) Priviţi : $1^2 = 1$;

$$3^2 = 2 + 3 + 4 ;$$

$$5^2 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7.$$

Puteţi continua ? Completaţi $19^2 = \ldots$ Care este cel mai mic termen al sumei din membrul drept ? Dar cel mai mare ?

4) Arătaţi că :

$$-\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = \sqrt{3} - 1 ; \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} = 1 - \sqrt{2}.$$

5) Este adevărat că $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ aproximează pe π cu eroare de cel mult 0,005 ? Dar cu eroare de cel mult 0,001 ?

6) Fie egalitatea $a = b$. Deci $a^2 = ab$, de unde

$$a^2 - b^2 = ab - b^2.$$

Descompunem cei doi membri în factori :

$$(a - b)(a + b) = (a - b)b,$$

de unde $a + b = b$, sau (ţinînd seamă că $a = b$) $2b = b$. Aşadar $2 = 1$. Unde este greşeala ?

7) Verificaţi că $4 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} = 9 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2}$ Completăm în ambii membri cîte un pătrat perfect :

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

Aşadar :

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2,$$

de unde $2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$, adică $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Unde este greşeala ?

8) Care număr este mai mare :

a) $2^{2^{2^2}}$, $2^{2^{22}}$, 2^{22^2}, 2^{222}, 22^{2^2}, 22^{22}, 222^2 sau 2222 ;

b) 9^{9^9}, 9^{99}, 99^9 sau 999 ?

9) Priviţi :

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 ;$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2.$$

Puteţi scrie produsul $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$ ca sumă de părate ? Dar de patru pătrate ?

Rezolvaţi sistemele de ecuaţii :

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 0, \\ x^2 - 2x - 2 = 0 ; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0. \end{cases}$$

Rezolvaţi ecuaţia $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - x - 2} = 0.$

11) Arătaţi că dacă $x + y = 2$, atunci $x^2 + y^2 > 2$ şi $x^3 + y^3 > 2$.

12) Ce formă are patrulaterul ale cărui vîrfuri sînt punctele de intersecţie ale dreptelor :

$$x - y - 2 = 0, x - y + 2 = 0, x + y - 2 = 0, \text{ şi } x + y + 2 = 0 ?$$

13) Descompuneţi în factori :

$$2a^2 - ab + 4ac - b^2 - bc + 2c^2$$

14) (După „Aritmetica" lui Diofant — sec. III.) Aflaţi două numere, ştiind că suma lor şi suma pătratelor lor sînt legate între ele. Să presupunem că suma lor este a zecea parte din suma pătratelor lor. Fie x numărul mai mic, iar cel mai mare fie $2x$; atunci suma lor este $3x$, iar suma pătratelor lor este $5x^2$. Deci $3x$ trebuie să fie a 10-a parte din $5x^2$. Care sînt numerele în acest caz ?

15) (Problemă veche chineză — înainte de sec. III.) La mijlocul fiecărei laturi a unui oraş de formă pătrată există cîte o poartă. La 20 bu (unitate de lungime) spre nord de poarta nordică se află un stîlp. Dacă de la poarta sudică ne deplasăm cu 14 bu spre sud, apoi spre apus cu 1775 bu, stîlpul devine vizibil. Ce lungime are zidul oraşului ?

16) (După Bhaskara — matematician indian, sec. XII.) Nişte maimuţe se distrează ; din tot cîrdul, o optime la pătrat se caţără prin copaci, iar 12 strigă toate-odată în vîrful colinei. Cîte maimuţe erau în cîrd ?

17) (După „Liber Abaci" a lui Leonardo Fibonacci, sec. XIII.) Un ţăran a cumpărat 30 de păsări cu 30 de monede ; pentru 5 potîrnichi a plătit 3 monede, pentru un porumbel 2 monede, iar pentru fiecare pereche de vrăbii cîte o monedă. Cîte păsări de fiecare fel a cumpărat ?

18) (După „Culegerea de probleme" a lui Chuquet — anul 1484.) Un zidar s-a înţeles cu un ţăran să-i ridice casa în 30 de zile ; în fiecare zi în care lucrează să cîştige 5 scuzi (monedă veche franceză) iar în fiecare zi în care nu lucrează să plătească ţăranului 6 scuzi. La capătul celor 30 de zile casa e terminată ; zidarul a muncit şi s-a odihnit în aşa fel încît a cîştigat 18 scuzi. Aflaţi cîte zile a muncit şi cîte s-a odihnit.

19) Iepurele alb spune că pisica minte. Pisica spune că Alice minte. Alice spune că iepurele alb şi pisica mint. Cine minte şi cine spune adevărul ? (După Lewis Carroll.)

20) Două rachete se îndreaptă una spre cealaltă, prima cu 9000 km/h, a doua cu 21000 km/h. Ele decolează din două puncte situate la o distanţă de 1317 km unul de altul. Care este distanţa dintre rachete, cu un minut înainte de ciocnire ? (După Martin Gardner.)

4. OLIMPIADE ŞI CONCURSURI

Textele problemelor au fost parţial modificate.

1) Se consideră ecuaţiile $x^2 - 4x + 3 = 0$ şi $x^2 - (a^2 + 1)x + 3a = 0$, unde a este un număr real. Pentru ce valori ale lui a ecuaţiile au o soluţie comună ?

(Olimpiada 1973)

2) Se dă polinomul $P(X) = aX^2 + bX + c$, în care coeficienţii a, b şi c sînt numere reale.

a) Determinaţi coeficienţii astfel încît $P(1) = P(2) = 0$ şi $P(-1) = 18$.

b) Pentru $a = 3$, $b = -9$, $c = 6$, descompuneţi polinomul în factori ; determinaţi apoi valorile reale ale lui m pentru care fracţia $F(X) = \dfrac{P(X)}{X^2 - 2X + m}$ este ireductibilă.

(Olimpiada 1974, jud. Iaşi)

3) Arătaţi că polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 - a^2X + 2a^3$ se divide cu $X^2 - aX + a^2$ apoi rezolvaţi ecuaţia $P(x) = 0$.

(Olimpiada 1974, mun. Bucureşti)

4) Arătaţi că polinomul $X^3 + aX^2 + bX + c$ se divide cu $X^2 + aX + b$ numai dacă $c = 0$.

(Olimpiada 1974, mun. Bucureşti)

5) Fie polinomul $P(X) = 4X^4 + 4X^3 + X^2 + 1$.

a) Aflaţi cîtul şi restul împărţirii lui $P(X)$ la $2X^2 + X$.

b) Care dintre următoarele afirmaţii sînt adevărate, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$: $P(x) < 0$; $P(x) = 0$; $P(x) > 0$?

c) Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbf{R}$ valoarea $P(x)$ este cea mai mică posibilă ? Care este această valoare ?

(Olimpiada 1975, mun. Bucureşti)

6) Fie ecuaţia $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2x}{x^2-4}$. Care dintre numerele sin 2° ; $\sqrt[3]{5}$; $1 + \sqrt{2}$; 4 sin 30° sînt soluţii ale ecuaţiei ?

(Olimpiada 1975 , mun. Bucureşti)

7) Dacă x şi y sînt două numere pozitive, arătaţi că $xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4}$. Arătaţi că dacă $x + y = k$, atunci cea mai mare valoare a produsului xy este $\dfrac{k^2}{4}$. În aceleaşi condiţii, arătaţi că cea mai mică valoare a lui $x^2 + y^2$ este $\dfrac{k^2}{2}$.

(Olimpiada 1975)

8) Arătaţi că dacă $x + y = s$ şi $xy = p$, atunci $x^2 + y^2 = s^2 - 2p$, $x^3 + y^3 = (s^2 - 3p)s$ şi $x^4 + y^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2$.

(Olimpiada 1975, jud. Bistriţa-Năsăud)

9) Se dă fracţia

$$F(X) = \frac{4X^3 - 32}{X^3 + (X+2)^3}.$$

a) Arătaţi că $F(X) = 2 - \dfrac{6}{X+1}$. b) Pentru ce numere reale x, fracţia este definită în x? c) Pentru ce valori ale lui x, numărul $F(x)$ este întreg ? d) Pentru ce valori ale lui x avem $F(x) = 2$?

(Olimpiada 1975, jud. Bistriţa-Năsăud)

10. Fie polinomul $P(X) = X^2 - 2X - 8$.

a) Aflaţi restul împărţirii polinomului prin $X + 2$ şi $X - 4$ fără a efectua împărţirile.

b) Simplificaţi $\dfrac{X^3 + 8}{X^2 - 2X - 8}$.

(Olimpiada 1976, jud. Constanţa)

11) Dacă polinomul $X^4 + 4aX^3 + 6bX^2 + 4cX + d$ este divizibil cu $X^3 + 3aX^2 + 3bX + c$, arătaţi că primul este un pătrat, iar al doilea cubul unui binom.

(Olimpiada 1976, mun. Bucureşti)

12) Pentru ce valori ale lui a, b, c polinomul $P(X) = 12X^3 - 40X^2 + 27X - 5$ poate fi scris descompus $P(X) = (3X - 1)(aX^2 + bX + c)$? Aflaţi rădăcinile polinomului.

(Concurs treaptă 1976, mun. Bucureşti)

13) Descompuneţi în factori $(X + Y + Z)^3 - X^3 - Y^3 - Z^3$.

(Concurs treaptă 1976, jud. Constanţa)

14) Fie $P(X) = aX^n + bX^m + cX^p$, $Q(X) = bX^n + cX^m + aX^p$ şi $R(X) = cX^n + aX^m + bX^p$, unde $a + b + c \neq 0$ şi $abc \neq 0$.

a) Arătaţi că polinoamele $P(X)$, $Q(X)$ şi $R(X)$ dau acelaşi rest la împărţirea cu $X - 1$.

b) Arătaţi că polinomul $P(X) + Q(X) - 2R(X)$ se divide cu $X - 1$.

c) Arătaţi că polinomul $P(X) + Q(X) + R(X)$ nu se divide cu $X + 1$.

(Olimpiada 1977, mun. Bucureşti)

15) Rezolvaţi ecuaţiile : a) $-9x^2 + 16x - \frac{13}{3} = 0$; b) $\frac{a - b}{x + 1} - \frac{a + b}{x - 1} = 0$ $(x \neq \pm 1,\ b \neq 0)$.

(Concurs treaptă 1977, jud. Dolj)

16) Rezolvaţi ecuaţia :

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} + \frac{6}{x + 1} + \frac{4}{x - 1} = 2.$$

(Concurs treaptă 1977, jud. Arad)

17) a) Arătaţi că polinomul $P(X) = X^4 - X^3 - 6X^2 + 4X + 8$ este divizibil cu polinoamele $Q(X) = X - 2$ şi $R(X) = X + 2$.

b) Folosind eventual rezultatul de la a), simplificaţi fracţia :

$$F(X) = \frac{X^4 - X^3 - 6X^2 + 4X + 8}{X^4 - 16}$$

(Concurs treaptă 1977, jud. Neamţ)

18) Reprezentaţi grafic funcţia $f(x) = x^2$ definită pe $[-2 ; 4]$ apoi aflaţi coordonatele punctelor de pe grafic care au abscisa egală cu ordonata.

(Concurs treaptă 1977, jud. Vaslui)

19) Simplificaţi fracţia

$$F(X) = \frac{8X^2 + 2X - 3}{4X^2 - X - 3}.$$

(Concurs treaptă 1976, jud. Brăila)

20) Fie ecuaţia $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Determinaţi valoarea lui m astfel încît ecuaţia să admită o singură soluţie.

(Concurs treaptă 1976, jud. Brăila)

21) Reprezentaţi grafic funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, descrisă de :

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ pentru } x \in (-\infty; 1), \\ -2x + 1 \text{ pentru } x \in [1; +\infty). \end{cases}$$

(Concurs treaptă 1979, mun. Bucureşti)

22) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii :

$$\begin{cases} \dfrac{2x - 3y}{5} - \dfrac{2y - 3x}{11} = \dfrac{112}{55}, \\ (x - 5)^2 - (3 - y)^2 = (x - y)(x + y) - 48. \end{cases}$$

(Concurs treaptă 1979, mun. Bucureşti)

23) Rezolvaţi sistemul de inecuaţii :

$$\begin{cases} 2x < 4x - 6, \\ 4x + 3 < 3x + 1. \end{cases}$$

(Concurs treaptă 1979, jud. Prahova)

24) Se dă ecuaţia :

$$\frac{x + a + 1}{x + a} = \frac{x + a - 1}{x - a} - \frac{a^2 + 1}{x^2 - a^2}.$$

a) Pentru ce valoare a lui a ecuaţia are soluţia 4 ?
b) Pentru ce valoare a lui x ecuaţia în a are soluţia 5 ?

(Concurs treaptă 1979, jud. Constanţa)

25) Fie f şi g două funcţii liniare.
a) Determinaţi funcţiile, ştiind că :

$$2f(x + 1) + g(x - 1) = 2x + 14$$
$$\text{şi } f(x + 1) - 2g(x - 1) = 6x - 18 \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}.$$

b) Reprezentaţi grafic funcţiile $f(x) = 2x$ şi $g(x) = -2x + 8$, apoi aflaţi coordonatele punctului de intersecţie a celor două grafice.

(Concurs treaptă 1979, jud. Arad)

26) Fie polinoamele $P(X) = X^2 - 3X + 2$ şi $Q(X) = X^2 + 3X + 2$. Arătaţi că $P(Q(X))$ se divide cu $X^2 + 3X + 1$.

(Olimpiada 1977, jud. Dolj)

27) Se dă polinomul $P(X) = X^4 + mX^3 - 7X^2 + nX + p$. Determinaţi m, n, p astfel încît $P(X)$ să se dividă cu $X - 1$, $X - 2$ şi $X - 3$, apoi rezolvaţi ecuaţia $P(x) = 0$.

(Olimpiada 1979, jud. Timiş)

28) Un triunghi isoscel are perimetrul de 160 m, iar baza este cu 20 m mai mică decît oricare dintre laturile egale. Aflaţi lungimile laturilor.

(Concurs treaptă 1980, jud. Dolj)

29) Determinaţi parametrul m astfel încît polinomul $2X^4 - mX^3 + X^2 - 7$ să dea restul 4 prin împărţirea la $X + 2$.

(Concurs treaptă 1980, jud. Dolj)

30) Numerele reale x, y, a şi b verifică relaţiile : $x + \dfrac{1}{x} = y + \dfrac{1}{y} = a$, $xy = b$. Ce relaţie există între a şi b ?

(Olimpiada 1979, mun. Bucureşti)

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

Pag. 3. *3)* 16%. 4) 57 lei/kg. 6) 2,75; 1,64; −5,92; 0,7. 7) −26, 25; −41,958.

Pag. 4. *3)* Suma diferă cu 1 de puterea 2^6. *4) a)* Suma diferă cu $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ de 2; *b)* Suma diferă cu $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ de 2. Puteţi generaliza ?

Pag. 5. *4)* Nu este adevărată dacă $a < 1$!

Pag. 6. *a)* 3^{10}; *b)* 9^5; *c)* $\left(-\frac{1}{3}\right)^5$; *e)* 8^9; *f)* $\left(-\frac{2}{3}\right)^9$.

Pag. 7. *1) a)* 5^{12}; *b)* $(-5)^{12}$; *c)* $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$; *d)* $\left(\frac{3}{2}\right)^{24}$; *e)* 3^{24}. *2)* 1,771561; *b)* 625; *c)* 0,2401; *d)* −91,125.

Pag. 8. *1) a)* 576; *b-c)* 1000. *2) a)* 2^{10}; *b)* 3^{15}; *c)* 2^{12}. *4) a)* 1215,50 lei (!) ; *b)* 1215,50625. *5)* 248,8 cm. *7) a)* $-8a^3b^3$; *b)* $-a^7$; *f)* a^{4n}. *9)* Nu. Are volumul de $\frac{27}{8} = 3,375$ ori mai mare. *10)* 90,4 kg (!)

Pag. 10. *b)* $\frac{9}{16}$; *c)* 1944.

Pag. 11. *5) a)* Numărul $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$ are proprietatea că $\frac{5}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = 1$. Dar şi numărul $\frac{4}{5}$ are proprietatea că $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = 1$ (!)

a) 4 ; *b)* 9 ; *c)* 2*x* ; *d)* 25.

Pag. 12. *1) a)* −512 ; *b)* 1 ; *c)* 6,75. *2)* Doar trei, dacă $x \neq -1$ şi $x \neq 1$. *3) a)* $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; *b)* $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; *c)* $\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}$.

Pag. 13. *a)* $5 \cdot 10^{-1}$; *b)* $3 \cdot 10^{-3}$; *d)* $3 \cdot 7^{-1}$; *e)* $14 \cdot 5^{-2}$.

Pag. 14. *1) a)* 0,47 ; *b)* 0,12 ; *c)* 0,169 ; *d)* 0,365 ; *e)* 0,12. *3) a)* $0,1 \cdot 10^{-2}$; *b)* $0,54 \cdot 10^3$. *4)* $0,318224 \cdot 10^8$. *5)* Aproximativ de 335000 ori. *6)* 520 secunde.

Pag. 16. *2)* a ; a ; a ; f ; f. *4)* da, dacă presupunem că $a \leq b$. *5) d)* $[a ; a+2]$; *e)* $[a-1 ; a+1]$. *6) e)* $\{a\}$; *f)* $[-4 ; 1]$ dacă $a \geq 1$; în caz contrar $[-a ; a]$.

7) a) $-3, -2, -1, 0, 1$ şi 2. *8)* $X = \{1; 3\}$ sau $X = \{2; 3\}$ sau $X = \{3\} = [3; 3]$. *9)* $a = 5$ şi $b = 9$.

Pag. 17. *1) a)* fals; *b), c), d)* adevărate. *3) a)* 1, 2, 3 şi 4. *4)* Din $a < b$ şi $a > 0$ rezultă $a^2 < ab$. Din $a < b$ şi $b > 0$ rezultă $ab < b^2$.

Pag. 18. *3)* Doar *d)* este falsă. *4) a)* $[2; 4]$; *b)* $\left(-\frac{1}{7} ; \frac{7}{5}\right)$; *c)* $[-1; 13)$; *d* $(-1; 3]$; *e)* $(1,3; 4,2]$. *6)* Intervalul semideschis $[5; 9)$.

Pag. 19. *3)* În acest caz $a < b$. *4)* Intersecţia este $[a; +\infty)$, iar reuniunea este $b; +\infty)$. *6)* a, a, a, a, f, f, a.

Pag. 19. *1)* Nu, deoarece $|x| \geq 0$; 2,13 şi $-2,13$. *2) a)* $[-4; 4]$; *b)* $(2; 4)$. *3)* $(0; 2) \supset (0,9; 1,1) \supset (0,09; 1,01) \supset (0,009; 1,001) \ni 1$.

Pag. 22. *1)* 0,28571...; poate fi aproximat de exemplu prin 0,285 prin 0,286 sau prin 0,2851 ! *3)* nu; nu; nu; da. *4) a)* $x = 5,1$ sau $x = 5,5$. *5)* De exemplu media aritmetică 3,145. *7)* Comparaţi pe x cu media aritmetică 3,2355. Dacă $x \leq 3,2355$, atunci 3,226 aproximează pe x; în caz contrar extremitatea 3,245 îl aproximează pe x. *8)* Între 27 şi 33 ml. *9)* Prin $\frac{138}{100}$ sau $\frac{139}{100}$.

Pag. 24. *1)* da; nu. *3)* Corect c !

Pag. 26. *1) a)* 0,3; *b)* 7,2; *c)* 3,33...; *d)* $-2,89...$. *2)* $m = -10$; nu. *3)* Ecuaţia are ca soluţie orice număr real. *4)* O singură soluţie : 1,472. *5) e)* $\frac{2}{17}$; *f)* -2; *g)* 0; *h)* $\frac{11}{15}$. *6) d)* Dacă $m \neq 0$, o singură soluţie: $-\frac{a}{m}$; dacă $m = 0$ şi $a \neq 0$, nici o soluţie; dacă $a = m = 0$, orice număr real este soluţie. *7)* Pentru $a = -1$.

Pag. 27. *2)* Sînt concurente.

Pag. 29. *1) c)* $x = 0,5$; $y = 0,2$; *2) d)* $x = -1$, $y = 1$; *e)* Soluţia este $(5; -3)$; *f)* $\left(\frac{27}{14}; -\frac{19}{14}\right)$.

3) a) $\left(\frac{47}{22}; -\frac{7}{22}\right)$; *b)* $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{5}\right)$; *c)* $\left(\frac{5}{8}; -\frac{1}{20}\right)$; *d)* $(4; 0,5)$; *e)* $(60; 36)$.

Pag. 31. *1) c)* $\left(\frac{60}{7}; \frac{22}{7}\right)$; *e)* $x = \frac{609}{590}$, $y = \frac{1117}{1770}$. *2) a)* $(2,25; 3,2)$; *b)* $(9; -3)$; *c)* $\left(\frac{2}{8}; -1\right)$. *3) a)* $(3; 6)$; *b)* $\left(-\frac{5}{8}; -\frac{1}{2}\right)$.

Pag. 33. *1) a)* $x = 5$, $y = 11$, $z = 17$; *b)* $(18; 12; 10)$; *c)* $(5; 3; 8)$. *2) a)* $\left(\frac{108}{17}; \frac{126}{17}; \frac{252}{17}\right)$; *c)* $(9; 9; 6)$.

Pag. 36. *1)* 20,5 m, 24,5 m, 27,5 m, *2)* 17,5 cm, 22,5 cm. *3)* BM și BP au lungimea $\frac{a-b+c}{2}$. *4)* 253 kg, 14 kg. *5)* 81, 16, 3; *6)* 45, 15 respectiv 5 litri pe minut; în 33 min. 20 sec., 100 min., respectiv 300 min.

Pag. 38. *2)* Nu. De exemplu, $\sqrt{3^2+4^2} = 5 \neq \sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}$

Pag. 38. *3) a)* $5\sqrt{30}$; *b)* $4\sqrt{10}$; *e)* $|a|\sqrt{21}$; *f)* $a^2\sqrt{21}$; *g)* $a^2b\sqrt{2b}$, deoarece $b \geq 0$!; *h)* $5a\sqrt{2a}$, deoarece $a \geq 0$! *5) a)* $30\sqrt{2} = \sqrt{1800}$; *b)* $-\sqrt{5}$. *6) a)* 3; *b)* $\frac{3}{5}$; *c)* $\sqrt{ab}$.

Pag. 40. *2) a)* $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; *b)* $\frac{7+\sqrt{21}}{7}$; *c)* $\frac{12\sqrt{3}-8\sqrt{30}}{6}$; *d)* $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; *e)* $\sqrt{2}-1$; *f)* $2-\sqrt{3}$; *g)* $2-\sqrt{3}$; *h)* $\frac{28+7\sqrt{2}}{45}$. *4) c)* Se raționalizează mai întîi numitorul: $4(\sqrt{2}+1)$; se folosește apoi tabelul. Rezultat 9,65.

Pag. 41. *2) j)* $5a\sqrt[3]{b^2}$; *k)* $2ab^2\sqrt[3]{2a}$; *l)* $(a-b)\sqrt[3]{(a+b)^2}$; *m)* $\frac{a-b}{a+b}\sqrt[3]{a+b}$. *3) c)* $\sqrt[3]{4}$; *f)* $\sqrt[3]{a^4-a^3b-ab^3+b^4}$. *4) a)* $28\sqrt[3]{3}$; *c)* $-\sqrt[3]{3a}$. *5) e)* $\sqrt[3]{4}$; *f)* $\frac{10}{3}$.

Pag. 42. *1) c)* $2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$. *3) a)* este pozitiv iar b este negativ dar au pătratele egale. Deci $a=-b$. *4) a)* Soluția este $x=\sqrt{2}$, $y=1$; *b)* Soluția $x=\sqrt[3]{2}$, $y=-1$.

Pag. 47. *8)* Doar f și g.

Pag. 50. *1)* $a=-5$. *3)* Graficele sînt drepte paralele. *6)* Graficele sînt semidrepte. *8) a)* $f(x)=-14x+24$; *b)* $g(x)=2x+2$; *c)* Nu. *9) a)* $T=20+\frac{1}{30,5}a$, a fiind adîncimea în metri, iar T tempeatura în °C.

Pag. 53. *5)* $g(x)=2x^2-4x$. *6)* $f(x)=x^2-4x+7$. *8)* Nu.

Pag. 56. *4) b)* 44 ohmi.

Pag. 57. *3)* $X^4-X^3-X^2-2X+4$.

Pag. 58. *1) a)* $-4X^2$; *b)* $-\frac{3}{2}X^2$; *c)* $5X^4$.

Pag. 60. *1) a)* $X^2-2X+\frac{2}{3}$; *b)* $-3X^3+\frac{5}{2}X^2-2X$.

2) a) Cîtul $X+2$, restul -1; *b)* cîtul $3X+9$, restul 47; *c)* Restul 0. *3) a)* Cîtul $X-1$, restul 2; *b)* Cîtul X^2-X+1, restul 0. *5)* Cîtul la prima împărțire este împărțitorul la cea de-a doua. *8) a)* $X^3-YX^2+Y^2X-Y^3$; *b)* $5X+2Y$; *c)* Cîtul $2X+3Y$, restul $4YX+2Y^2$. *9) a)* $-6YX+18Y^2$; *b)* $-6XY+2X^2$.

Pag. 63. *1) a)* Nu; *b)* da; *c)* da; *d)* nu; *e)* da; *f)* da. *3)* $m=44$.

Pag. 64. *1) e)* $(X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-2X+1)(X^2+2X+1)$; *f)* $(X-1)\cdot(X^2+X+1)\cdot(X^6+X^3+1)$. *2)* Reductibile sînt X^2-4, $X^2-2=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$, X^2-4X+4, $X^3+8=(X+2)(X^2-2X+4)$, $X^3+2=(X+\sqrt[3]{2})(X^2-\sqrt[3]{2}X+\sqrt[3]{4})$ şi $X^4+1=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$. *4)* Valorile $P(a)$ şi $Q(a)$ sînt egale pentru orice a; de fapt avem acelaşi polinom, scris în două moduri diferite.

Pag. 65. *1) a)* rest -9; *b)* rest 3; *c)* rest -9; *e)* rest -14. *4)* 0,869. *5)* $m=-\frac{2}{3}$, $n=-\frac{46}{3}$, restul $-\frac{2}{3}$.

Pag. 65. *3) a)* -3, -1 şi 3; *b)* -3, -2 şi 2; *c)* -1, 1 şi 3.

Pag. 66. *2) c)* $(3X-1)(3X+4)$; *d)* $(6X+1)^3(6X+4)$. *3) a)* $9X^4+30X^2+25$; *b)* $9X^4-60X^2+100$. *4) a)* $(X^3+0,5)^2$; *b)* $(3X^2-2)^2$. *5) a)* $(7X^3-4)(7X^3+4)$; *b)* $(X-1)(5X+5)$; *e)* $X^3(5X-4)(5X+4)$. *6) b)* $X^2(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$; *c)* $X(\sqrt{2}X-1)(\sqrt{2}X+1)$.

Pag. 67. *1) a)* $(2X-3)(4X^2+6X+9)$; *b)* $2X(X^2+12)$; *c)* $X\left(\frac{1}{2}X-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{2}X+1\right)$ *2) c)* $(X-1)(X+1)^2(X^2-X+1)$. *3) a)* $(X-\sqrt[3]{2})(X^2+\sqrt[3]{2}X+\sqrt[3]{4})$; *c)* $(X-\sqrt[3]{4})(X^2+\sqrt[3]{4}X+2\sqrt[3]{2})$.

Pag. 68. *1) a)* $(X-3)(X+2)$; *b)* $(X+3)(X-2)$; *f)* $(3X-1)(X-2)$. *3) a)* $(X-1)(X-2)(X^2+3X-12)$; *b)* $(X-1)(X+4)(X^2+3X+6)$; *c)* $(X-1)\cdot(X+1)(X-2)^2$; *d)* $(X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$; *f)* $(X-1)(X+1)(X-2)(X^2+2X+4)$.

Pag. 69. *1) a)* $(X-Y)(X^2+Y^2)$; *b)* $(A+B)(A^2+B^2)$; *c)* $(X+A)(X+B)$; *d)* $(X+5)(Y+3)$; *e)* $(XY-a^2)(X+Y+a)$; *f)* $(X+a)(X^2+3a^2)$. *2) a)* $(X-Y)(X+Y)(X^2+3Y^2)$; *b)* $(X-Y)(X+Y)(X^2-XY+Y^2)(X^2+XY+Y^2)$; c) $(3X-2Y)^2$; *d)* $3(X-Y)(3X-Y)$; *e)* $X^2(9Y-4X)(9Y+4X)$; *f)* $(3X-4Y)(9X^2+12XY+16Y^2)$. *3) a)* $(X+1)(Y+1)(X^2Y^2-X^2Y-XY^2+X^2+4XY+Y^2-X-Y+1)$; *b)* $(X-Y)(X-Z)(2X+Y+Z)$; *c)* $(X-a+b)(X+a-b)$; *d)* $(a^2+b^2)(X^2+Y^2)$; *e)* $(X-Y)(X^2+XY-Y^2)$; *g)* Completaţi pînă la un pătrat perfect: $(X^3+3Y^2)^2-(2XY)^2$.

Pag. 71. *2) a)* X^2+X; *b)* $X+1$; *c)* $2X+3$; *d)* $X-2$; *e)* $X-2$; *f)* $X-4$; *g)* $X+2$; *h)* $X-2$. *4) a)* $X-Y$; *b)* $(X+Y)^2$. *5) a)* X^2-X+1 nu se divide nici cu $X-1$, nici cu $X+1$; *b)* X^2+X+1 nu se divide nici cu $X+1$, nici cu $X+2$.

Pag. 72. *2) a)* X^2-4X+3 sau $2X^2-8X+6$. *b)* X^2+3X+5; *c)* Sînt prime între ele; *g)* X^3+X^2+X+1; *h)* $X-1$.

Pag. 74. *2)* $(X-a)(X-b)(X-c)=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc$. *3) a)* $X(X-4)^2$; *b)* $X(X^3-8)$; *c)* $X(X^2+1)$; *d)* $(3X+2)(27X^3+8)$; *e)* $X(X^3-1)$. *5) b)* $X^8+X^6-X^2-1$.

Pag. 76. *1) c)* $P(\sqrt{2})$ este aproximativ 5,1. *2)* $a=-54$. *4) a)* $-4X^2+X$; *b)* $-X^2+1$.

Pag. 77. *3)* $y=\frac{9}{7}$; $y=0$.

Pag. 78. *2) a)* $\frac{9X}{4} = \frac{9}{4}X$; *f)* $\frac{X^3+8}{X^2+X}$ (nu se simplifică!). *4) a)* $X-3$; *b)* $\frac{X-Y-Z}{-X+Y-Z}$; *c)* $\frac{18X(X-Y)}{X+Y}$.

Pag. 80. *2) a)* 1; *b)* $-\frac{1}{2}$; *c)* -2; *d)* -5; *e)* 0.

Pag. 82. *2) a)* 5; *b)* $\frac{X^2-X+1}{X}$; *c)* $\frac{2}{X-1}$.

Pag. 85. *2) c)* $\frac{X^2+1}{X^2+X}$; f) $\frac{2X}{X^2-1}$. *4) a)* $\frac{6X}{X^2-X}$; *b)* $\frac{9X+2}{X^2-4}$. *5) b)* şi *c)* $\frac{1}{1-X}$.

Pag. 86. *2) a)* 0; *b)* $\frac{1}{X-2}$. *4) a)* $\frac{2X}{X+Y}$.

Pag. 90. *3) b)* $\frac{X^2+XY}{-2Y}$; *c)* $\frac{4Y}{X-1}$. *4) a)* $3X^2(X+Y)^2$; *c)* $\frac{X^2}{(X+Y)(X^3-Y^3)}$. *7) a)* $X-1$; *b)* $\frac{X^2-2X+4}{X^2+2X+2}$. *8)* Transformaţi mai întîi în fracţii raţionale, apoi simplificaţi-le pe cît posibil !

Pag. 93. *3)* Toate. *5) b)* Nici o valoare.

Pag. 96. *2) b)* şi *f)* nu au soluţii ; *k)* Dacă $a = 9$, atunci are soluţia 0 ; dacă $a \neq 9$, nu are soluţii ; *l)* nu are soluţii ; *m)* Dacă $m = 0$, atunci are soluţia 0 ; dacă $m \neq 0$, ecuaţia are două soluţii ; *5) h)* 0 şi $\frac{\sqrt{2}}{2}$. *6) a)* Soluţii -26 şi 24 ; *c)* nu are soluţii ; *d)* o singură soluţie ; -2; *g)* soluţii $-\sqrt{2}$ şi $-\sqrt{5}$; *l)* dacă $m = n$, o singură soluţie ! *8)* Indicaţie : analizaţi posibilităţile $a = 0$; $a \neq 0$. *9)* Obţinem ecuaţia $\sqrt{2}l^2 = 1$; aproximaţi soluţiile ei !

Pag. 101. *2) a)* 2 şi 12 ; *b)* -2 şi -12. *4)* Ecuaţiile au aceleaşi soluţii ; ce puteţi deduce ? *6)* Nu. *7)* $m = -92$ sau $m = 92$. *9)* Folosiţi tabelul de la sfîrşitul manualului. *10)* $m = -9$; a doua soluţie este 25.

Pag. 105. *6) c)* nu are soluţii. *8) a)* $3-\sqrt{5}$ şi $3+\sqrt{5}$; *c)* $-4-\sqrt{22}$ şi $-4+\sqrt{22}$; *d)* o singură soluţie : 2.

Pag. 109. *3)* Folosiţi relaţiile lui Viète, după caz. *b)* $x_2 = -\frac{1}{2}$, $m = -9$; *c)* $x_1 = 1$, $m = 3$. *4)* 311 şi 26. *5)* 192 şi 75. *7)* Pentru $m = 2$ şi $n = -4$. *8)* $3\sqrt{4}$; -3. *9)* Da, pentru $m = -1$.

Pag. 111. *2) a)* $\frac{X+13}{2X-15}$; *b)* $\frac{X+4}{2X+5}$; *e)* $\frac{3X-1}{2X+9}$. *3).* Discriminantul este negativ doar pentru $m \neq 0$. Pentru $m = 0$ trinomul este reductibil !

Pag. 114. *1) a)* Soluţii 2 şi $\frac{-3}{5}$.; *c)* nu are soluţii; *e)* nu are soluţii. *2) b)* Nu are soluţii; *i)* o singură soluţie : 2; *k)* 1; *l)* 6. *3) a)* Patru soluţii : $\pm\sqrt{10}$, $\pm\sqrt{11}$; *b)* nu are soluţii.

Pag. 118. *1)* 40 m. *2)* 79 şi 80 cm^2. *3)* $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale ; 20 laturi. *4)* $a = \pm 2\sqrt{3}$. *5)* 4 m şi 4 m; 5m şi 3,2 m. *6)* 12 şi 8 ohmi. *7)* 80 cm şi 100 cm.

Pag. 120. *1)* Evident, 1,024 ; *2)* $u^{-1} = \frac{15}{22}$; $u^2 = \frac{484}{225}$. *3)* $\frac{u}{v} = \frac{-1435}{416}$. *4) a)* $m = -3$; *b)* $m = -3$; *c)* $m = 4$. *5)* Aproximativ $0,34866 \cdot 10^6$ și $0,142 \cdot 10^{-3}$; $0,1776 \cdot 10^2$. *6)* $a = \frac{22\sqrt{3}}{3}$, adică aproximativ 12,8 cm. *7)* $a = 8$, $b = \frac{40}{3}$, $c = 20$. *8)* Între 2,2016 și 2,56054. *9)* $\sqrt{34}$ cm, adică aproximativ 5,8 cm. *10)* Negativ ; pozitiv. *11)* 2. *12)* 2 și aproximativ 3,3. *13)* $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. *14)* Indicație. Aplicați teorema lui Pitagora celor două triunghiuri dreptunghice neasemenea din fig. 4 ; $l_{2n} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1-(l_n/2)^2}}$. *15)* Volumul este de aproximativ $0,14 \cdot 10^{16}$ km^3. *16)* $R = 3$ kΩ; circuitul poate fi înlocuit prin rezistorul R. *17)* 0,5 kΩ. *18)* Adunăm, apoi scădem cele două ecuații. Soluția este (3; 2). *19)* $m = -7$. *20)* Soluții : orice număr real diferit de -1. *21)* $a = 5$. *23)* 35 N. *25)* 24. *26)* $m = 4$, $n = 6$. *27)* $Q(X) = (X-2)(2X-3)(2X+3)$. *28)* $a = -3$. *29)* Cîtul este $X^{n-1} + aX^{n-2} + a^2X^{n-3} + \ldots + a^{n-2}X + a^{n-1}$. *30)* $a = -2$. *31)* $a = 7, b = 5, c = 4$, *32)* Trebuie ca $P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$; $a = 4, b = -12, c = 5$. *33)* $R = Y(X-1)(XY-1)$; $S = X(X-1)(2-Y^2)$. *34)* $(X-2Y)^3$. *35)* $(X+Y-2)(X+2)$. *36)* $X(X-1)(X-4)(X+3)(X+4)$. *37)* $a = -3$ sau $a = -24$; nu, deoarece în acest caz ar trebui să fie Q. *38) a)* $s = -15$; *b)* $s = 13$; *c)* pentru nici o valoare. *39) a)* $X + \frac{1}{5}$; *b)* $\frac{Y+1}{Y+3}$; *c)* $\frac{5}{2Y+9}$; *d)* $5X - 1$. *40) a)* $2Z - 7$; *b)* $\frac{X^2-X+1}{X}$; *c)* $\frac{2X+18}{X+6}$; *d)* $\frac{X^2+X+6}{X+3}$.

41) a) Este de preferat să notăm $X^2 - 1 = Y$; $\frac{X^2-2}{X^2-3}$; *b)* La fel, notăm $X^2 + X = Y$; $\frac{X^2+X-1}{X^2+X+1}$. *42) a)* $\frac{8X}{(X^2-4)^2}$; *b)* $\frac{12X+16}{X^2-16}$; *c)* $\frac{4}{X+4}$; *d)* 1; *e)* $\frac{X^2+Y^2+Z^2}{XYZ}$.

43) a) $\frac{X-1}{2X-1}$; *b)* $\frac{12X+15}{2X+3}$; *c)* $X^2 + XY$. *44) a)* $\frac{X^2-3XY}{XY+3Y^2}$; *b)* 1; *c)* $\frac{Y+X}{Y-X}$.

45) a) $\frac{8-2X-3X^2}{32X^2-18}$; *b)* $\frac{1}{X}$; *c)* 2. *46)* Corect c). *47) a)* $-0,2$ și 0,6 ; *b)* -4 și $\frac{3}{7}$; *c)* $-\frac{3}{2}$ și $\frac{9}{2}$; *d)* $\frac{1}{4}$ și $\frac{1}{2}$; *e)* $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ și $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. *48)* $a = 1$ sau $a = 2$. *49) a)* $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} + \frac{3}{16} = 0$ sau $16\mathbf{x}^2 - 16\mathbf{x} + 3 = 0$; *b)* $\mathbf{x}^2 + \frac{5}{12}\mathbf{x} - \frac{1}{6} = 0$; *c)* $\mathbf{x}^2 + \frac{7}{11}\mathbf{x} - \frac{18}{121} = 0$; *d)* $\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} - 1 = 0$. *50) a)* $\mathbf{x}^2 - 2a\mathbf{x} + a^2 - b^2 = 0$. *51) a)* $a\mathbf{x}^2 - b\mathbf{x} + c = 0$; *b)* $a\mathbf{x}^2 + 2b\mathbf{x} + 4c = 0$; *c)* $a\mathbf{x}^2 + (b-4a)\mathbf{x} + (c - 2b + 4a) = 0$; *d)* $c\mathbf{x}^2 + b\mathbf{x} + a = 0$. *52)* $m = -12$ sau $m = 12$; $m = 0$. *53) a)* $m = 12$; *b)* $m = -1$; *c)* $m = 15$. *54)* Notăm $\mathbf{y} = \frac{4+\mathbf{x}}{1+\mathbf{x}}$, de unde $\mathbf{x} = \frac{4-\mathbf{y}}{\mathbf{y}-1}$; ecuația de gradul al II-lea $\mathbf{y}^2 - m\mathbf{y} - 1 = 0$ are discriminantul pozitiv, oricare ar fi m real. *55)* $m = 22$; soluția 5. *56)* Nu. *57) c)* și *a)*. *58)* Nu. Prima inegalitate se deduce din faptul că discriminantul este negativ. *59) a)* Soluții -3 și 3; *e)* soluții 5 și -2. *60) a)* Soluții $-m$ și $4m$; *b)* soluții $-m-1$ și $-m+1$; *d)* o singură soluție : $\frac{m+1}{2}$. *61) a)* Soluții $-2, -1, 1$ și 2; *d)* o soluție: 9; *e)* o soluție: 3; *f)* 4 și 5.

62) Discriminantul se poate scrie $\frac{1}{2}(m-n)^2 + \frac{1}{2}(n-p)^2 + \frac{1}{2}(p-m)^2$, deci nu poate fi negativ.

63) Dacă x este soluția comună, atunci x este soluție a ecuației $(a\mathbf{x}^2 + 3\mathbf{x} + a^2 + 1) - (a\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} + a^2 + 2) = 0$, adică $x = 1$. Dar 1 nu poate fi soluție a primei ecuații, orice valoare ar avea parametrul a. Presupunerea că ecuațiile au soluție comună este deci falsă. *64)* Dacă p este numărul participanților, numărul

partidelor jucate este $\frac{p(p-1)}{2}$; 10 participanţi. *65)* Lungimea celei de a n-a înfăşurări este aproximativ $(3 + 2n \cdot 0{,}1)\pi$. Încap aproximativ 2700 înfăşurări; filmul are lungimea de aproximativ 1398 m. *66)* Tăiaţi bucata mai întîi paralel cu o bază. Determinaţi la ce distanţă de bază !

Pag. 125. *1) a)* 0 ; *b)* 1. *2)* 100. *3)* Numerele sînt pozitive. Comparăm pătratele lor cu 2^2. *4)* Al doilea este încărcat cu peste 3,5 m^3 pietriş. *5)* Indicaţie : arătaţi că numerele se divid cu 3 ! *6)* 34 cu mînecă scurtă şi 1 cu mînecă lungă ; la fel, sau 35 cu mînecă scurtă. *7)* 100 numere ; 50 numere ; 12 numere ; 20 numere. *8)* Nu există astfel de numere naturale ; ele ar trebui să fie divizibile cu $16 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. *9) a)* $a = b = 1$; $a = 1, b = -1$, *c)* $a = b = 1$. *10) a)* $x^2 + y^2 = 16$ e posibil doar dacă $x = 0$, $y = 4$. Rămîne $x^2 + 16 = y^2$, care se mai scrie $16 = (y - x)(y + x)$. Observaţi că apar doar posibilităţile $y - x = 1$, $y - x = 2$ şi $y - x = 4$; *b)* 15, 16, ..., 21 ; *c)* Dacă $a + 1$ este primul număr, obţinem că $x(2a + x - 43) = 4$, de unde $x = 1$, $x = 2$ sau $x = 4$. Cazul $x = 1$ este banal. Cazul $x' = 2$ nu convine. Numerele sînt 21, 22, 23 şi 24. *11)* Între $\frac{1}{3}$ şi 1. *12)* Cel tîrziu la ora 9 şi 49 minute. *13)* Aproximativ 47. *14)* În 6 ore şi 40 minute. *15)* Plimbarea pe rîu. *16)* Nu, ci doar cu 32%. *17)* $2\pi r_1 r_2$. 18) $f : [2 ; 5] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{7}{3}x - \frac{29}{3}$. *19)* Relaţia se scrie $\frac{(b-a)(c-b)(a-c)}{abc} = 0$! *20)* 8 ; 56 ; 3104. *21)* $(X + Y + Z)^3$. *22)* $\frac{(-1)^{m+1}(2Y-2)}{X^2 - (Y-1)^2}$. *24)* Împărţiţi cu b^2 ; $\frac{3}{5}$ sau 2. *25)* Notăm cu x lungimea unei laturi ; atunci aria va fi $x\left(\frac{p}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{p}{2}x$; aria este maximă atunci cînd $x = \frac{p}{4}$. *26)* Numărul de diagonale al unui poligon cu n laturi este $\frac{n(n-3)}{2}$; 100 de laturi. *27) a)* (2 ; 5) ; *b)* (16 ; 25) ; *c)* soluţii (−2 ; −1) şi (2 ; −1). *28)* da, nu, da, nu, nu.

Pag. 126. *1)* $1 + 5 + 87 + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{64}$. *4)* Ridicaţi ambii membri la puterea a treia. *5)* Da ; nu. *6)* Nu este corect să simplificăm cu $a - b$! *7)* Extrăgînd radicalii, nu este corect să neglijăm modulul ! *8)* 22^{22} şi 9^9. *9)* Desfăcînd parantezele, este sumă de 16 pătrate ! Cele 4 pătrate sînt $(ax - by - cz - dt)^2$, $(ay + bx + ct - dz)^2$, $(az - bt + cx + dy)^2$ şi $(at + bz - cy + dx)^2$. *10)* Primul nu are soluţie ; al doilea şi ecuaţia au soluţia 2. *11)* Deduceţi că dacă $x + y = 2$, atunci $xy \leq 1$. *12)* Este un pătrat. *13)* $(2a + b + 2c)(a - b + c)$. *15)* 250 bu. *16)* Două soluţii : 16 sau 48 ! *17)* 10 porumbei şi 20 vrăbii ; găsiţi şi alte soluţii ! *19)* Doar pisica nu minte. *20)* 500 km.

Pag. 128. *1)* Prima ecuaţie are ca soluţii 1 sau 3. Pentru $a = -1, 0, 2$ sau 3. *2) a)* $a = 3$, $c = -9$, $c = 6$; *b)* pentru $m \neq 0$ şi $m \neq 1$. *3)* Cîtul este $X + 2a$. Ecuaţia are o singură soluţie, $-2a$. *4)* Cîtul este X, restul c. *5) a)* Cîtul este $2X^2 + X$, restul este 1 ; *b)* a treia ; *c)* pentru $x = 0$ sau $x = -\frac{1}{2}$; valoarea minimă este 1. *6)* Doar primele trei ! *7)* Formaţi o ecuaţie de gradul al II-lea avînd ca soluţii pe x şi pe y. Discriminantul ei este ≥ 0 ! *9) a)* Simplificăm cu $2X^2 + 4X + 8$; *b)* pentru $x \neq -1$; *c)* pentru $x = -7, -4, -3, -2, 0, 1, 2$ şi 5; *d)* pentru nici o valoare a lui x ! *10) a)* Resturile sînt 0 ; *b)* $\frac{X^2 - 2X + 4}{X - 4}$. *11)* Anulaţi restul împărţirii. Rezultă $a = b = c = d = 1$, pătratul fiind $(X^2 + 2X + 1)^2$. *12)* $a = 4$, $b = -12$, $c = 5$; rădăcinile sînt $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ şi $\frac{5}{2}$. *13)* $3(X + Y)(X + Z)(Y + Z)$. *14) a)* Restul este $a + b + c$; *b)* $(P + Q - 2R)(1) = P(1) + Q(1) - 2R(1) = 0$; *c)* $P(-1) + Q(-1) + R(-1) = (a + b + c)[(-1)^m + (-1)^n + (-1)^p] \neq 0$!

15) a) Soluţii $\frac{1}{3}$ şi $\frac{13}{9}$, *b)* dacă $a \neq 0$, o soluţie, anume $-1 - \frac{a}{b}$. *16)* Soluţii 0 şi 10. *17) b)* $\frac{X^2 - X - 2}{X^2 + 4}$. *18)* Doar punctele (0; 0) şi (1; 1). *19)* $\frac{2X - 1}{X - 1}$. *20)* Scriind că discriminantul ecuaţiei este 0, obţinem $m^2 - 4m + 4 = 0$, de unde $m = 2$. *22)* Soluţie (10; 6). *23)* Nu are soluţii. *24) a)* *Pentru* $a = 1$ sau $a = -9$; *b)* pentru $x = -3$. *25) a)* $f(x) = 2x$, $g(x) = -2x + 8$; *b)* punctul (2; 4). *26)* $P(Q(X)) = (X^2 + 3X + 2)^2 - 3(X^2 + 3X + 2) + 2$; cîtul este $X^2 + 3X$. *27)* $m = -3$, $n = 27$, $= -18$; rădăcinile polinomului sînt 1, 2, 3 şi -3. *28)* 60 m, 60 m şi 40 m. *29)* $m = \frac{25}{8}$. *30)* $a^2 = \frac{(b + 1)^2}{b}$.

TABELUL RĂDĂCINILOR PĂTRATE ŞI CUBICE ALE NUMERELOR NATURALE MAI MICI DECÎT 100

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1,0000	1,0000	51	7,1414	3,7084
2	1,4142	1,2599	52	7,2111	3,7325
3	1,7321	1,4422	53	7,2801	3,7563
4	2,0000	1,5874	54	7,3485	3,7798
5	2,2361	1,7100	55	7,4162	3,8030
6	2,4495	1,8171	56	7,4833	3,8259
7	2,6458	1,9129	57	7,5498	3,8485
8	2,8284	2,0000	58	7,6158	3,8709
9	3,0000	2,0801	59	7,6811	3,8930
10	3,1623	2,1544	60	7,7460	3,9149
11	3,3166	2,2240	61	7,8102	3,9365
12	3,4641	2,2894	62	7,8740	3,9579
13	3,6056	2,3513	63	7,9373	3,9791
14	3,7417	2,4101	64	8,0000	4,0000
15	3,8730	2,4662	65	8,0623	4,0207
16	4,0000	2,5198	66	8,1240	4,0412
17	4,1231	2,5713	67	8,1854	4,0615
18	4,2426	2,6207	68	8,2462	4,0817
19	4,3589	2,6684	69	8,3066	4,1016
20	4,4721	2,7144	70	8,3666	4,1213
21	4,5826	2,7589	71	8,4261	4,1408
22	4,6904	2,8020	72	8,4653	4,1602
23	4,7958	2,8439	73	8,5440	4,1793
24	4,8990	2,8845	74	8,6023	4,1983
25	5,0000	2,9240	75	8,6603	4,2172
26	5,0990	2,9625	76	8,7178	4,2358
27	5,1962	3,0000	77	8,7750	4,2543
28	5,2915	3,0366	78	8,8318	4,2727
29	5,3852	3,0723	79	8,8882	4,2908
30	5,4772	3,1072	80	8,9443	4,3089

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
31	5,5678	3,1414	81	9,0000	4,3267
32	5,6569	3,1748	82	9,0554	4,3445
33	5,7446	3,2075	83	9,1104	4,3621
34	5,8310	3,2396	84	9,1652	4,3795
35	5,9161	3,2711	85	9,2195	4,3968
36	6,0000	3,3019	86	9,2736	4,4140
37	6,0828	3,3322	87	9,3274	4,4310
38	6,1644	3,3620	88	9,3808	4,4480
39	6,2450	3,3912	89	9,4340	4,4647
40	6,3246	3,4200	90	9,4868	4,4814
41	6,4031	3,4482	91	9,5394	4,4979
42	6,4807	3,4760	92	9,5917	4,5144
43	6,5574	3,5034	93	9,6437	4,5307
44	6,6332	3,5303	94	9,6954	4,5468
45	6,7082	3,5569	95	9,7468	4,5629
46	6,7823	3,5830	96	9,7980	4,5789
47	6,8557	3,6088	97	9,8489	4,5947
48	6,9282	3,6342	98	9,8995	4,6104
49	7,0000	3,6593	99	9,9499	4,6261
50	7,0711	3,6840	100	10,0000	4,6416

CUPRINS

